UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN MARCOS

DE LIMA

FACULTAD DE CIENCIAS BIOLOGICAS,
FISICAS Y MATEMATICAS

GODOFREDO GARCIA

LECCIONES

— DE —

MECANICA RACIONAL

VOLUMEN I

Teoría de Vectores--Cinemática.

AÑO 1937

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN MARCOS

DE LIMA

FACULTAD DE CIENCIAS BIOLOGICAS,
FISICAS Y MATEMATICAS

GODOFREDO GARCIA

LECCIONES

— DE —

MECANICA RACIONAL

VOLUMEN I

Teoría de Vectores--Cinemática.

AÑO 1937

Erratas advertidas:

Debe decir:

Página 31, segunda línea: que precisa la *forma* geométrica.....

Página 88, décima línea: no es ya *equivalente* a un solo.....

Página 89, línea once: 76. Sustitución o reductivilidad de un sistema por otro *equivalente* de vectores aplicados.—.....

Página 101, primera línea: punto de los ∞^3 un sistema *equipolente* al definido.....

Página 129, línea catorce: El sistema (26) es *equivalente*.....

Pagina 258, línea diez (fórmula):

$$J_{x_1} = -\omega v_{x_2} \qquad J_{x_2} = \omega v_{x_1} \qquad J_{x_3} = 0$$

531
G16l
REMOTE STORAGE

2 JAN 48 TALMADGE

PREFACIO

Este primer volúmen de Mecanica Racional comprende la Teoría de Vectores y la Cinemática, lecciones que dicto en la Facultad de Ciencias de la Universidad Mayor de San Marcos de Lima.

Me he permitido publicar estas lecciones después de consultar notables tratados como en lugar preferente figura la magistral y moderna obra de los profesores Tullio Levi-Civita y Ugo Amaldi.

El Cálculo Vectorial intrínseco que en el espacio ordinario ha recibido una sistematización debida a los profesores T. Levi-Civita, P. Burgatti, C. Burali-Forti, R. Marcolongo, A. Palatini, ha sido tambien extendido a un espacio o variedad de un número cualquiera de dimensiones.

La Teoría de Vectores es el algoritmo más expresivo y más ágil para el planteo y la discusión matemática de los problemas de Mecánica y de las altas teorías físicas, así lo expresan en su obra los profesores T. Levi-Civita y U. Amaldi.

La Teoría Vectorial es el lenguaje natural de la Mecánica, así lo considera el profesor Grossmann.

Han sido tambien consultados al escribir este primer volumen con especial interés las obras de Mecanica Racional de P. Appell, P. Painleve, R. Bricard, P. Montel, H. Bouasse, F. Bouny y F. Villareal.

GODOFREDO GARCIA

3547 G. García

Al eminente profesor. Oscar Zariski
afectuoso homenaje de su adicto amigo.
Godofredo García

MECANICA RACIONAL

PRELIMINARES

1. Magnitud.—Son entes capaces de ser medidos o contados y entre los cuales se puede establecer la *igualdad* y la *suma*. Nos referimos a las magnitudes de que haremos uso en el estudio de la Mecánica y de la Física.

2. Unidad.—Es la magnitud tipo, elegida arbitrariamente para comparar con ella las magnitudes de su misma especie.

3. Las magnitudes por su naturaleza pueden ser: *Aritmética, Algebraica, Geométrica* y *Mecánica*.

4. Magnitud Aritmética.—Es la representable por el número *absoluto*. Su representación gráfica sobre una recta es el *segmento*.

5. Magnitud Algebraica.—Es la representable por el número *relativo*. Su representación gráfica sobre una recta orientada es el *segmento orientado*.

6. Magnitud Geométrica.—Es la representable por el número en un concepto *relativo* de *signo o sentido dentro de la dirección*. Su representación gráfica más importante es el *vector*.

7. Magnitud Mecánica.—Es la representable por el número en un concepto *relativo de signo o sentido dentro de la dirección*, dependiendo además del tiempo.

8. Equipolencia.—Es la igualdad en el triple aspecto de número o longitud, signo o sentido, dentro de la dirección.

9. Orientación de la terna.—Se dice que una terna es *sinestror-*

sum, cuando haciendo que el índice de la mano izquierda esté en el sentido positivo del eje x_1 (fig. 1) y el dedo cordal en el sentido positivo del eje x_2; el pulgar señale la dirección positiva del

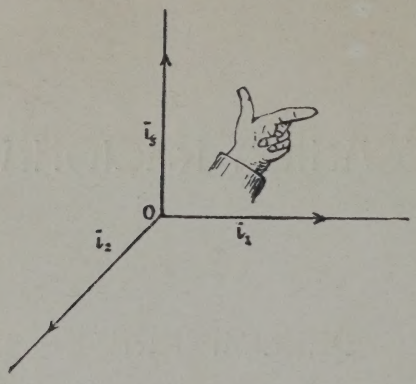


Fig 1.

tercer eje; en caso contrario, es decir, si el dedo pulgar señalara dirección contraria a la positiva del tercer eje, la terna recibe la denominación de *destrorsum*.

CAPITULO PRIMERO

TEORIA VECTORIAL

§ 1.—Segmentos, Segmentos Orientados y Vectores.

10. Segmentos.—Un *segmento AB* (fig. 2) es una porción de recta limitada por los puntos *A* y *B*. La recta *AB*, indefinidamente prolongada en ambos sentidos, se llama *línea de acción* del segmento *AB*. La porción de recta *AB*, se mide eligiendo una porción *ab* = ι que representa la unidad *(segmento unitario)*; el número de veces que el segmento dado contiene al segmento unidad y que lo representaremos por *m* se llama *módulo* (con respecto a una unidad prefijada). El módulo de un segmento es un número esencialmente absoluto.

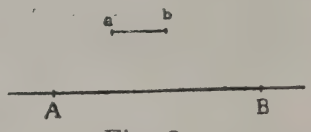


Fig. 2

11. Segmentos orientados.—Cuando al segmento se le atribuye un sentido, tal como de *A* a *B*, el segmento se llama orientado y se indica con la notación $\overline{AB}$. (fig. 3)

El punto *A* indica el *origen* o *primer extremo* y el punto *B* el *segundo extremo*, o simplemente *extremo*; la recta que los une se denomina como en el caso del segmento, *línea de acción* del segmento orientado.

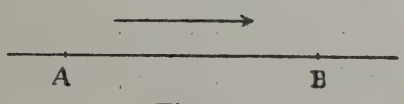


Fig. 3

Si en el mismo segmento, consideramos el sentido contrario, es decir, de *B* a *A*, se tiene el segmento orientado $\overline{BA}$, que tiene la misma línea de acción de $\overline{AB}$, pero de orígen *B* y extremo *A*.

Si A y B coinciden el segmento $\overline{AB}$ se reduce al único punto $A = B$ y se llama *segmento nulo*. En tal caso la línea de acción y el sentido son indeterminados, y es el único caso en el cual los segmentos orientados opuestos $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ coinciden.

Un segmento orientado es, en consecuencia, un ente geométrico caracterizado por un *origen* y una *longitud*, dada una *dirección* y un *sentido*.

La longitud se determina con respecto a una unidad elegida, a la que naturalmente se le ha fijado un sentido. $\imath = \pm \iota$

Para evitar confusiones, diremos que con la palabra "dirección" se indica la característica común a una recta dada y a todas sus paralelas (o *punto impropio* de la Geometría proyectiva) independiente del sentido.

Con la notación que hemos indicado para el segmento orientado, se salva toda confusión, ya que el punto A es el *origen* y el punto B el *extremo* del segmento orientado $\overline{AB}$.

La ventaja de este convenio es que al mismo tiempo que se indica el segmento AB, se indica también la posición relativa de los puntos A y B.

Consecuente con las definiciones que hemos dado de *segmentos* y de *segmentos orientados* se verificará que:

$$AB = BA = \iota m,$$

para los *segmentos* y,

$$\overline{AB} = -\overline{BA} = \pm \iota AB$$

para los *segmentos orientados*.

Obsérvese además, que si cabe la representación de la *magnitud algebraica*, sobre una recta orientada, por el *segmento orientado*, es porque puede hacerse una correspondencia *biunívoca* y *continua*, entre los puntos de la recta orientada y los números relativos (representación de la magnitud algebraica), pudiéndose ordenar como el conjunto de los números reales. Por esto, estas magnitudes reciben también la denominación de *escalares* o *lineales*. Son por lo demás, las más generales dentro de un universo *unidimensional*.

12. Segmentos orientados equipolentes.—Dos segmentos orientados son *equipolentes* cuando tienen la misma longitud, la misma dirección y el mismo sentido. En el caso de segmentos nulos, pode-

mos considerarlos a todos como equipolentes. ya que su longitud es nula y su dirección y su sentido son igualmente indeterminados para todos.

La equipolencia de segmentos orientados goza, en virtud de su definición, de las propiedades fundamentales de la igualdad, es decir:

1°. **Propiedad reflexiva.**—Cada segmento es equipolente a sí mismo.

2°. **Propiedad simétrica.**—Si $\overline{AB}$ es equipolente a $\overline{CD}$, $\overline{CD}$ es equipolente a $\overline{AB}$, es decir, si un segmento orientado es equipolente á otro, este último será equipolente al primero;

3°. **Propiedad transitiva.**—Dos segmentos orientados equipolentes a un tercero son equipolentes entre sí.

Para terminar con este número, diremos que se llama *proyección* de un segmento orientado $\overline{AB}$, sobre una recta o sobre un plano, el segmento orientado $\overline{A_1B_1}$, que tiene por origen y por extremo los proyecciones ortogonales de A y B, respectivamente sobre la recta o sobre el plano considerado. Es evidente que *si dos segmentos orientados son equipolentes, son tambien equipolentes sus proyecciones sobre una misma dirección o sobre una misma dirección plana.*

13. Vectores.—Los segmentos equipolentes a un segmento orientado dado $\overline{AB}$ son ∞^3, uno por cada punto del espacio, tomado como origen y cuya longitud, dirección y sentido son los de $\overline{AB}$. El ente abstracto que se puede hacer corresponder a esta clase de ∞^3 segmentos orientados, es decir, el ente geométrico caracterizado por la longitud, la dirección y el sentido de $\overline{AB}$ (*sin tener en cuenta su orígen*) se llama *vector*.

Para individualizar un vector, podemos tomar el segmento orientado $\overline{AB}$ o, indiferentemente, uno cualquiera de sus equipolentes, de la misma manera que para determinar la característica común de un plano y todos sus paralelos (*recta impropia* de la Geometría proyectiva) puede tomarse uno cualquiera de dichos planos.

Si imaginamos una función del segmento orientado $\overline{AB}$ de suerte que tome el mismo valor para todos los segmentos orientados equipolentes a $\overline{AB}$, podremos decir que dicha función define al vector.

14. Notación.—Para determinar un vector se emplea dos letras superponiendo al grupo formado por ellas una flecha. También se

usa representar el vector utilizando una sola letra acompañada siempre de una flecha, así:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{V}$$

Una notación que presenta ventajas apreciables es la debida a H. Grassmann. Según ella podemos escribir:

$$\vec{V} = B - A;$$

El vector $\vec{V}$ está dado aquí como la *diferencia simbólica de dos puntos*. La equipolencia de dos segmentos orientados $\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}$ se escribirá así:

$$B - A = B_1 - A_1$$

Si tratamos esta igualdad como una igualdad algebraica, obtendremos las consecuencias siguientes:

$$A - B = A_1 - B_1\,, \qquad A - A_1 = B - B_1\,, \qquad A_1 - A = B_1 - B,$$

que son exactas, como podría verse en el paralelógramo formado por los segmentos orientados equipolentes $\overline{AB}$ y $\overline{A_1B_1}$

Excepto el caso en que el vector sea nulo y que se designa simplemente por O, ó, por $A - A = O$ (según H. Grassmann), podemos elegir para denotar el vector cualquiera de las notaciones mencionadas.

La longitud de un vector no nulo $\vec{V}$, se llama *módulo* o *tensor* del vector y se le denota con:

$$\text{mod. } \vec{V},$$

o más simplemente con la misma letra que designa el vector, pero sin la flecha:

$$\text{mod. } \vec{V} = V$$

15. Vectores unitarios.—Dícese *vector unidad*, al vector cuyo módulo es igual a uno; y se puede decir que cada vector unitario individualiza una dirección orientada y viceversa. De aquí resulta que todo vector es igual al producto de una magnitud escalar por un *vector unidad*.

En un universo bidimensional en el que como unidad de medida tomaremos el vector unitario $\overrightarrow{AC} = \vec{\chi}$, la expresión del vector será $\vec{V} = \vec{\chi}\, m$. La unidad $\vec{\chi}$ goza como sabemos de una nueva modalidad: dirección orientada; pero, dentro del universo al que pertenece y sólo dentro de él.

En un universo tridimensional, la unidad de medida la representaremos por $\overrightarrow{AC} = \vec{\Phi}_3$ y por consiguiente, la expresión del vector será $\vec{V} = \vec{\Phi}_3\, m$. La unidad $\vec{\Phi}_3$ goza como la anterior de la particularidad de indicar una dirección orientada; pero, en un sentido más amplio, ya que su variabilidad se extiende a un universo tridimensional.

Ahora, generalizando, diremos que la unidad en un universo ene-dimensional la representaremos por $\vec{\Phi}_n$ y con un sentido de variación mucho más amplio, pues tiene para su variabilidad un universo ene-dimensional.

Puede notarse a través de este ligero estudio de las *magnitudes vectoriales*, que podemos llamarlas también *complejas*, la imposibilidad de poderlas ordenar en escala creciente o decreciente porque no guardan la misma ordenación que los puntos de una recta, no pudiéndo por lo tanto ser ordenadas en *serie rectilínea*; pero sí, pueden hacerse corresponder a los puntos de un plano (universo bidimensional) o de un universo de mayor número de dimensiones: *campo de los números complejos.*

16. Vectores iguales.—Dos vectores $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ son *iguales*. cuando tienen igual la longitud, la dirección y el sentido. Por consiguiente la igualdad entre vectores se reduce a la identidad lógica. Dicha igualdad se denota escribiendo $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$, donde por definición, el signo $=$ indica que los símbolos $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ representan un mismo vector. Resulta de las condiciones precedentes, que el signo $=$ goza de las propiedades reflexiva simétrica y transitiva.

17. Vectores componentes de un vector.—Un espacio tridimensional podemos considerarlo constituído por ∞^3 puntos, o por ∞^2 rectas paralelas, o también, por ∞^1 planos paralelos, de la misma manera que consideramos a una recta como formada por ∞^1 puntos y a un plano por ∞^2 puntos. Si proyectamos los ∞^3 segmentos equipolentes que representan un mismo vector $\vec{V}$, sobre cada una de

las rectas paralelas, obtendremos ∞^1 segmentos orientados equipolentes entre ellos, y como por otra parte son ∞^2 las rectas paralelas, en definitiva tendremos $\infty^1 . \infty^2 = \infty^3$ segmentos orientados equipolentes entre ellos, y que representarán un único vector. A este vector se le llama el *componente* del vector dado $\vec{V}$, según la dirección determinada por el punto impropio de las paralelas mencionadas. Si ahora proyectamos los ∞^3 segmentos orientados sobre cada uno de los planos paralelos, obtendremos en cada uno de ellos ∞^2 segmentos orientados equipolentes entre sí, y como los planos son ∞^1. obtendremos, como en el caso anterior, ∞^3 segmentos orientados, equipolentes entre sí. A este vector se le llama el *componente* del vector dado $\vec{V}$, según la dirección plana dada determinada por la recta impropia que la define.

El componente de un vector $\vec{V}$ diferente a O, es nulo siempre y sólo que la dirección o el plano que se considera sea normal a $\vec{V}$; mientras que el vector nulo tiene componente nulo cualquiera que sea la dirección o el plano que se considere.

Por otra parte es evidente que *si dos vectores son iguales, son también iguales, sus componentes, según una dirección o una dirección plana cualquiera.*

18. Proyección algebraica de un vector según una dirección orientada dada.—Sea r una *recta orientada* y $\vec{V}$, un vector. Se denomina proyección algebraica del *vector* $\vec{V}$ sobre la recta orientada r a la longitud del vector componente de $\vec{V}$ según la dirección de r, y acompañada del signo + o —, según que dicha componente resulte dirigida en el mismo sentido o en sentido contrario a r. El número relativo que así obtendremos, es decir el valor algebraico del segmento orientado $\overline{ab}$, y que designaremos con V_r será la *componente del vector* $\vec{V}$ según la recta orientada r. La componente de un vector no cambia, si la recta orientada con respecto a la cual se considera, se traslada paralelamente a ella misma, conservando su sentido; y, cambia solamente de signo, si se invierte la orientación de dicha recta.

Es muy importante, por el uso repetido que haremos, la fórmula que expresa V_r en función de la longitud V del vector $\vec{V}$ y

del ángulo α que forma el vector $\vec{V}$ y la recta orientada r. Por un téorema de Geometría Analítica tenemos

$$(1) \qquad V_r = V \cos \alpha = V \cos (-\alpha)$$

Esta fórmula nos hace ver que se mantiene válida aún en el el caso en que el vector $\vec{V}$ sea nulo, puesto que el primer miembro V_r se anula por definición, y el segundo resulta igualmente nulo por ser nulo V, mientras cos α se mantiene finito.

19. Representación cartesiana de los vectores.—Para la representación cartesiana de un vector refirámosle a una terna orientada trirectangular, y recordando que para individualizar un vector $\vec{V}$ basta tomar un segmento orientado $\overline{AB}$, que es uno de los ∞^3 segmentos orientados que tienen longitud, dirección y sentido igual a los que posee el vector $\vec{V}$ que los representa, bastará por consiguiente dar las coordenadas x_u e y_u $(u = 1.2.3)$ del origen A y del extremo B de tal segmento orientado.

Designemos ahora con V_u $(u = 1,2,3)$ las componentes de $\vec{V}$ según los ejes. Por Geometria Analítica se sabe:

$$(2) \qquad V_u = x_u - y_u \qquad (u = 1.2.3);$$

y, si designamos con α_u $(u = 1,2,3,)$ los ángulos directores de $\vec{V}$, resulta de la (1)

$$(3) \qquad V_u = V \cos \alpha_u \qquad (u = 1,2,3)$$

Estas dos ternas de fórmulas nos dan todos los elementos característicos de las componentes de un vector según los ejes.

Elevando al cuadrado las fórmulas (3), sumándolas y despejando V (longitud de $\overline{AB}$), tendremos la expresión

$$(4) \qquad V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} = \sqrt{\sum_{1\,u}^{3} V^2_u}$$

este radical debe tomarse en un sentido aritmético, y se anula solo en el caso en que se anulen las tres componentes V_u $(u = 1,2,3)$. Excluyendo este caso, que corresponde al vector nulo, la dirección orientada de $\vec{V}$ se determina valiéndose de las fórmulas (3) y (4)

$$(5) \qquad \cos \alpha_u = \frac{V_u}{V} = \frac{V_u}{\sqrt{\sum_{1u}^{3} V_u^2}} \qquad u = 1.2.3,$$

donde, en particular, resulta que para $V = 1$ las componentes coinciden con los respectivos cosenos directores.

En general la expresión cartesiana de un vector está determinada por sus componentes según los ejes y por los cosenos direcvores de dicho vector.

Se puede observar por las fórmulas (2) y (5) que existe una correspondencia biunívoca entre los vectores en el espacio y la terna de los números $V_u\,(u = 1,2,3.)$, y por este motivo a las componentes de un vector suele llamárseles también *coordenadas* del vector.

Si se fija una recta orientada r de cosenos directores $\cos \beta_u$ $(u = 1,2,3.)$ se tiene para la componente V_r, la expresión:

$$(6) \qquad V_r = V_u \cos \beta_u \qquad u = 1,2,3.$$

Por último sean dos vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ de componentes X_u e Y_u $(u = 1,2,3.)$, respectivamente. Por una fórmula de Geometría Analítica tenemos;

$$(7) \qquad \cos (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \sum_{1u}^{3} \cos \alpha_u \cos \beta_u \qquad u = 1,2,3.$$

donde $\cos \alpha_u$ y $\cos \beta_u$ $(u = 1,2,3.)$ son los cosenos directores de $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ respectivamente.

Además por la (3), tenemos:

$$\cos \alpha_u = \frac{X_u}{V_1} \qquad \cos \beta_u = \frac{Y_u}{V_2} \qquad u = 1,2.3.,$$

que multiplicadas miembro a miembro nos dá:

$$(8) \qquad \cos (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \frac{\sum_{1u}^{3} X_u Y_u}{V_1 . V_2}$$

§ 2. Suma de punto y vector.—Suma de Vectores.—Producto de un vector por un número.—Vectores Coplanares.

21. Suma de punto y vector.—Vectores aplicados.—La notación de H. Grassman, nos conduce de una manera sencilla a la interpretación de esta suma.

En efecto, siguiendo dicha notación, podremos escribir:

$$B - A = \vec{V} \tag{9}$$

que se lee "B menos A", y que representa el vector determinado por los puntos A y B y dirigido de A hacia B.

Si tratamos a esta igualdad como una igualdad algebraica, se tendrá:

$$B = A + \vec{V} \tag{10}$$

El punto B, extremo del segmento orientado $\overline{AB}$, representa el resultado de la suma del punto A y del vector $\vec{V}$ dados.

Toda vez que querramos construir un punto B, dado un punto A de suerte que el segmento orientado $\overline{AB}$ sea equipolente a los definidos por el vector $\vec{V}$, emplearemos esta operación que hemos llamado suma del punto A y del vector $\vec{V}$. El segmento orientado $\overline{AB}$ se llamará en lo sucesivo *vector $\vec{V}$ aplicado en A.*

Esta denominación nos parece impropia por cuanto que se dá a un mismo concepto dos denominaciones distintas; pero, en atención al uso indebido que se ha hecho de la palabra vector en los cursos de Mecánica y de Física, lo interpretaremos, con la observación que hemos hecho.

22. Suma de vectores.—Sean $\vec{V}_u$ $(u = 1,2,3,\cdots,n.)$ los vectores dados y A_0 un punto cualquiera del espacio, en virtud del número precedente podemos escribir (fig. 4)

$$A_u = A_{u-1} + \vec{V}_u \qquad u = 1,2,3,\cdots,n., \tag{11}$$

es decir, habremos construído a partir de A_0, la poligonal (en ge-

neral alabeada) $A_0 A_1 A_2 \cdots A_n$, cuyos lados $A_0 A_1$, $A_1 A_2, \cdots A_{n-1} A_n$, orientados de suerte que indiquen el recorrido de la poligonal A_0 a A_n, representan segmentos orientados equipolentes a los definidos por los vectores dados.

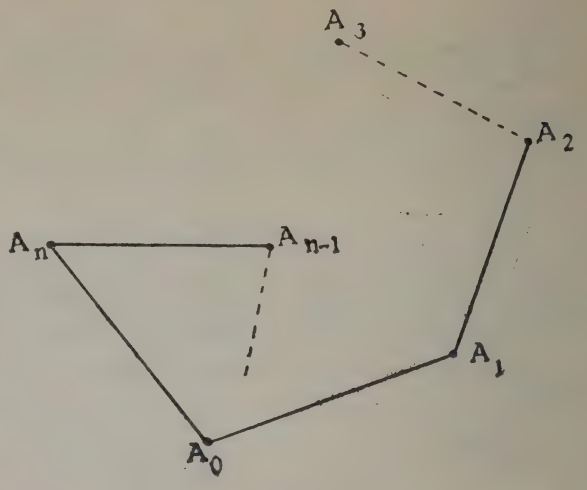


Fig. 4

Si efectuamos la misma construcción a partir de otro punto cualquiera del espacio, la poligonal que obtendremos, tendrá como lados segmentos orientados equipolentes a los definidos por los vectores dados; y, el segmento orientado que tiene como orígen este nuevo punto y por extremo el extremo del último segmento equipolente, será, como sabemos por Geometría elemental, equipolente al segmento orientado $A_0 A_n$ Esta operación podremos repetirla ∞^3 veces, una por cada punto del espacio, y en consecuencia obtendremos ∞^3 segmentos orientados equipolentes al segmento orientado $A_0 A_n$, que definen un mismo vector $\vec{V}$. Este ente vector $\vec{V}$ se denomina *vector suma* de los vectores dados y, recibe el nombre de *resultante* cuando se considera al vector suma aplicado en un punto.

Para expresar la suma se escribe:

$$\vec{V} = \sum_{1}^{n} \vec{V}_u. \tag{12}$$

La operación de la suma de varios vectores se llama *composición* de los vectores dados, y cualquiera de ellos recibe el nombre de *vector componente* del vector suma.

De la definición de la suma se desprende que la suma de una serie de vectores paralelos a una recta o a un plano, es un vector paralelo a la recta o al plano dado, respectivamente.

23. **La suma de vectores goza de las propiedades asociativa y conmutativa.**—Para demostrarlo de una manera sencilla, refirámosle a una terna de ejes cartesianos y denominemos con X_u, Y_u, Z_u, las componentes del vector V_u $(u = 1, 2, \cdots, n)$. Si elegimos como primer vértice de la poligonal el origen O de la terna de los ejes, en virtud de la (10) calcularemos sucesivamente las coordenadas de los vértices A_1, A_2, $\cdots$, encontramos por último las coordenadas de A_n, vale decir, las componentes X, Y, Z de la resultante $A_n - O$ de los vectores dados, las expresiones.

$$(13) \qquad X = \sum_{1}^{n} X_u, \qquad Y = \sum_{1}^{n} Y_u \qquad Z = \sum_{1}^{n} Z_u,$$

demuestran la validez de las propiedades nombradas para la suma de los vectores.

24. Dada una dirección orientada cualquiera, se deduce con un razonamiento completamente análogo al empleado en el número precedente que: *la componente de la resultante de varios vectores según una dirección orientada cualquiera es igual a la suma algebraica de las componentes análogas de los vectores considerados.*

Si multiplicamos las componentes de la resultante y de los vectores dados por el vector unitario que tenga la dirección y el sentido del eje considerado, nos resulta que: *la proyección de la resultante de varios vectores sobre una dirección dada coincide con la resultante de las proyecciones de los vectores considerados sobre aquella dirección.*

Esta propiedad se extiende para el caso de las proyecciones sobre una dirección plana cualesquiera. Para probarlo basta imaginar que uno de los planos coordenados, por ejemplo el xy, sea la dirección plana dada: ahora las componentes sobre dicha dirección plana de los vectores $\vec{V}_u$ y de la resultante son dadas por X_u, Y_u, O y X, Y, O, respectivamente; de donde en virtud de las dos primeras fórmulas de las (13) se infiere que la *proyección de la resultante coincide con la resultante de las proyecciones.*

25. **Producto de un vector por un número.**—El producto de un vector $\vec{V}$ por un número n (en general, un número real) es un vector perfectamente determinado, y que tiene:

1°. Una *longitud* igual producto de la longitud de $\vec{V}$ por el valor absoluto de n;

2°. la misma *dirección* de $\vec{V}$;

3°. el mismo *sentido* de $\vec{V}$ o sentido contrario, según que n sea positivo o negativo.

Cualquiera que sea n, el vector $n\,\vec{V}$ es paralelo a $\vec{V}$, y, viceversa, si $V \neq O$, cada vector $\vec{V}_1$ paralelo a $\vec{V}$ puede representarse en la forma

$$\vec{V}_1 = n\,\vec{V} \tag{14}$$

donde el número n resulta unívocamente determinado puesto que tiene el valor absoluto (n) igual a la relación de las longitudes de V_1 y V, y el signo + ó —, segun que el sentido de $\vec{V}_1$ y $\vec{V}$ sean iguales o no.

El producto de un número por un vector se anulará siempre y solo que sea nulo, o el número, o el vector, o ambos.

En particular, si $n = -1$, se tiene el vector $(-1)\,\vec{V}$, que tiene la misma dirección y la misma longitud de $\vec{V}$ pero sentido opuesto. A este vector se le denomina vector *opuesto* de $\vec{V}$ y se designa simplemente por $-\vec{V}$.

26. Basándonos en las propiedades de triángulos semejantes, que son conocidas por Geometría elemental, podemos escribir las identidades siguientes:

$$n_1\,\vec{V} + n_2\,\vec{V} = (n_1 + n_2)\,\vec{V}\ , \qquad n_1\,(n_2\,\vec{V}) = n_1\,n_2\,\vec{V}\ ;$$

$$n\,\vec{V}_1 + n\,\vec{V}_2 = n\,(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)\ , \qquad \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + (-\vec{V}_2)\ ,$$

$$\frac{\vec{V}}{n} = \frac{1}{n}\,\vec{V}\ ;$$

y por consiguiente, *todas las reglas del cálculo algebráico relativas a los signos* +, —, *al producto* y *al cociente por un número real, son aplicables a los vectores.*

27. Combinando la definición del producto de un número por un vector con la relativa a la suma de vectores (n. 22) podemos establecer de una manera general: que una expresión lineal cualquiera del tipo $\sum_{1}^{n}{}_u n_u \vec{V}_u$ representan un vector perfectamente determinado y cuyas componentes son

$$(16) \qquad \sum_{1\,u}^{n} n_u X_u \quad , \quad \sum_{1\,u}^{n} n_u Y_u \quad , \quad \sum_{1\,u}^{n} n_u Z_u \quad ,$$

28. Vectores coplanares.—Son los vectores que corresponden a una misma *dirección plana.*

29. Paralelogramo de vectores.—Sean dos vectores no paralelos $A_u - O = \vec{V}_u$ por $u = 1, 2$ (fig. 5) por un punto O construyamos los puntos $A_u = O + \vec{V}_u$ determinando así los segmentos orientados $\overline{OA}_u$ sobre la paralela trazada por A_1 a OA_2 construyamos el punto A determinando de esta manera el segmento orientado $\overline{A_1A}$ uniendo A_2 con A el cuadrilatero OA_1AA_2 es evidentemente un paralelógramo siendo el segmento orientado $\overline{OA}$ la diagonal. Los vectores $\vec{V}_u$ son los componentes y el vector $\vec{V}$ el resultante.

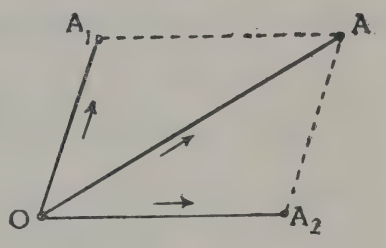


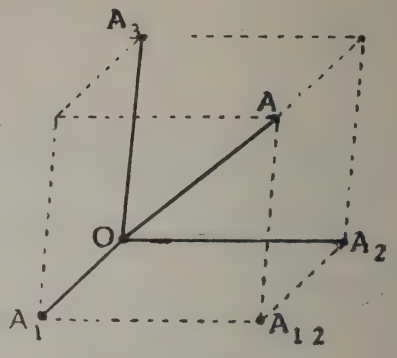
Fig. 5

Como por cada uno de los ∞^3 puntos del espacio pueden construirse ∞^3 paralelógramos equipolentes determinados por las dos clases de segmentos orientados equipolentes, que definen los vectores $\vec{V}_u$ y $\vec{V}$ por $u = 1.2$. El ente geométrico abstracto que puede hacerse corresponder a esta clase de paralelógramos equipolentes se llama *paralelógramo de vectores.*

Así se tendrá para los dos vectores que no tienen la misma dirección el resultante

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$$

30. Paralelepípedo de vectores.—Sean tres vectores no coplanares $A_u - O = \overrightarrow{V_u}$ por $u = 1.2.3$ (fig. 6) a partir de un punto O construyamos los puntos $A_u = O + \overrightarrow{V_u}$ determinando de esta manera los segmentos orientados $\overline{OA_u}$ por cada uno de los puntos A_u completemos como en el caso anterior los tres paralelógramos definidos por el haber trazado los tres segmentos orientados quedando así construídos los puntos A_{12}, A_{13}, A_{23} (vértices opuestos a O) eligiendo uno de estos puntos tal como el A_{12} trazaremos por él una paralela al segmento orientado que falta en dicho vértice y construyamos sobre esta paralela el punto $A = A_{12} + \overrightarrow{V_3}$ que unido con los otros dos puntos A_{13} y A_{23} se determina evidentemente un paralelepípedo siendo el segmento orientado $\overline{OA}$ la diagonal. Los vectores $\overrightarrow{V_u}$ son los componentes y el vector $\overrightarrow{V}$ el resultante.



Fíg. 6

Como por cada uno de los ∞^3 puntos del espacio pueden construirse ∞^3 paralelepípedos equipolentes determinados por las tres clases de segmentos orientados equipolentes que definen los vectores $\overrightarrow{V_u}$ y $\overrightarrow{V}$ por $u = 1.2.3$.

El ente geométrico abstracto que puede hacerse corresponder a esta clase de paralelépipedos equipolentes se llama *paralelepípedo de vectores.*

Así se tendrá para los tres vectores que no tienen la misma dirección plana el resultante

$$\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_2} +$$

$$+ \overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_2}$$

31. Componentes de un vector.—Sean dos vectores coplanares diferentes a cero y que no tengan la misma dirección es decir no pa-

ralelos. $\overrightarrow{V_u}$ por $u = 1.2$ y otro vector cualquiera $\overrightarrow{V}$ coplanar con los anteriores. Existe un par y solo uno de números relativos n_u $u = 1.2$ tales que verifican la igualdad siguiente:

$$\overrightarrow{V} = \sum_{1\,u}^{2} n_u \overrightarrow{V_u} \tag{17}$$

Para demostrarlo elijamos un punto cualquiera O y construyamos los puntos (fig. 7)

$$A_u = O + \overrightarrow{V_u} \qquad u = 1.2$$

$$A = O + \overrightarrow{V}$$

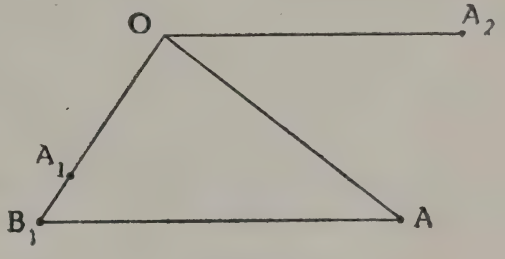


Fig. 7

Los vectores $\overrightarrow{V_u}$ y $\overrightarrow{V}$ son coplanares. $\overline{OA_u}$ por $u = 1.2$ determinan un plano en el cual está el punto A. Tracemos por A una paralela a $\overline{OA_2}$. Esta paralela encuentra a $\overline{OA_1}$ en el punto B_1, por consiguiente

$$\overrightarrow{V} = A - O = (B_1 - O) + (A - B_1) \tag{18}$$

Los vectores $B_1 - O$ y $A - B_1$ son respectivamente paralelos a los $\overrightarrow{V_u}$ siendo (n°. 25)

$$B_1 - O = n_1 \overrightarrow{V_1} \qquad\qquad A - B_1 = n_2 \overrightarrow{V_2}$$

El par de números es único, en efecto supongamos que sea

$$\sum_{1\,u}^{2} n_u \overrightarrow{V_u} = \sum_{1\,u}^{2} m_u \overrightarrow{V_u} \tag{19}$$

Si por ejemplo $n_1 \neq m_1$. Se tendrá

$$\overrightarrow{V_1} = \frac{m_2 - n_2}{n_1 - m_1} \overrightarrow{V_2} \tag{20}$$

lo que nos dice que $\overrightarrow{V_1}$ será paralelo a $\overrightarrow{V_2}$ en contradicción con la hipótesis.

Recíproco. Todo vector de la forma $\sum_{1\,u}^{3} n_u \overrightarrow{V_u}$ es coplanar con los $\overrightarrow{V}$ por $u = 1.2.$

32. Vectores no coplanares.—Sean tres vectores $\overrightarrow{V_u}$ por $u = 1.2.3$, no coplanares y un vector $\overrightarrow{V}$ cualquiera.

Existe un sistema y solo uno de números relativos n_u $u = 1.2.3$ tal que

$$\overrightarrow{V} = \sum_{1\,u}^{3} n_u V_u \tag{21}$$

Para demostrarlo elijamos un punto cualquiera O (fig. 8) y construyamos los puntos

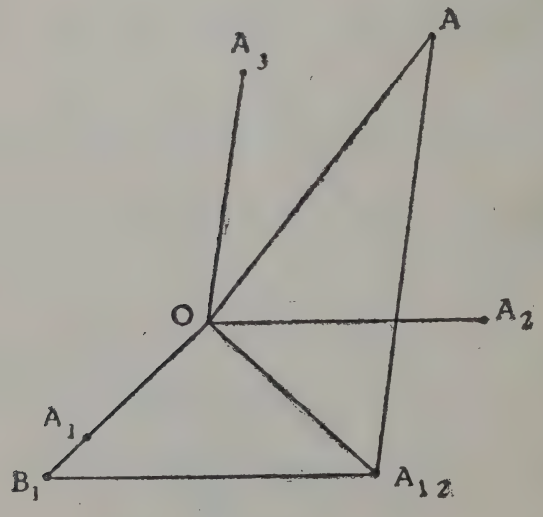


Fig. 8

$$A_u = O + \overrightarrow{V_u} \qquad u = 1.2.3$$

$$A = O + \overrightarrow{V}$$

Los vectores $\overrightarrow{V_u}$ y $\overrightarrow{V}$ no son coplanares. $\overline{OA_u}$ por $u = 1.2.3$ forman un triedro, tracemos por el punto A una paralela a $\overline{OA_3}$ que encontrará al plano OA_1A_2 en el punto A_{12} (que podría estar confundido con A) entonces se tendrá

$$\overrightarrow{V} = A - O = (A_{12} - O) + (A - A_{12}) \tag{22}$$

El vector $A_{12} - O$ es coplanar con los $\overrightarrow{V_u}$ por $u = 1.2$ luego

$$A_{12} - O = \sum_{1\,u}^{2} n_u \overrightarrow{V_u} \tag{23}$$

Además

$$A - A_{12} = n_3 \overrightarrow{V_3} \tag{24}$$

de las que se deduce la (21).

El sistema es único, en efecto si suponemos que

$$\sum_{1\,u}^{3} n_u \overrightarrow{V_u} = \sum_{1\,u}^{3} m_u \overrightarrow{V_u} \tag{25}$$

Siendo por ejemplo $n_1 \neq m_1$. Se tendrá

$$\overrightarrow{V_1} = \frac{m_2 - n_2}{n_1 - n_2} \overrightarrow{V_2} + \frac{m_3 - n_3}{n_1 - n_2} \overrightarrow{V_3} \tag{26}$$

$\overrightarrow{V_1}$ será coplanar con $\overrightarrow{V_2}$ y $\overrightarrow{V_3}$ en contradicción con la hipótesis

33. Consecuencias.—1°. Los vectores $n_u \overrightarrow{V_u}$ se denominan los componentes del vector $\overrightarrow{V}$ segun los vectores $\overrightarrow{V_u}$.

2°. Todo vector en el que los componentes segun uno de los vectores es nulo es coplanar con los otros dos.

3°. Todo vector en el que los componentes según dos de los mismos son nulos es paralelo al tercero.

34. Diferencia de punto y vector.—Sea $B - A = \overrightarrow{V}$ el vector dado y B el punto, (que puede ser uno cualquiera del espacio).

Si en la notación H. Grassmann despejamos A, tendremos

$$A = B - \overrightarrow{V} \tag{27}$$

El punto A, origen del segmento orientado $\overline{AB}$, representa el resultado de la diferencia del punto B y del vector $\overrightarrow{V}$ dados.

La fórmula (27) puede escribirse también n. 26 de la siguiente manera:

$$A = B + (-\overrightarrow{V}) \quad , \tag{28}$$

es decir, que la diferencia de un punto B y un vector $\overrightarrow{V}$ se puede reducir a la suma del punto B y del vector $-\overrightarrow{V}$, opuesto al vecto $\overrightarrow{V}$

35. Diferencia de dos vectores.—Así como la diferencia de punto y vector hemos visto que puede reducirse a la suma de estos entes; también, en virtud del n. 26 podemos reducir la diferencia de dos vectores $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$, a la suma del vector $\overrightarrow{V_1}$ y del vector $-\overrightarrow{V_2}$, opuesto a $\overrightarrow{V_2}$ (fig. 9) Esta diferencia $\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$, está individualizada por la diagonal A_2 y A_1 del paralelógramo OA_1AA_2, construído sobre OA_1 y OA_2.

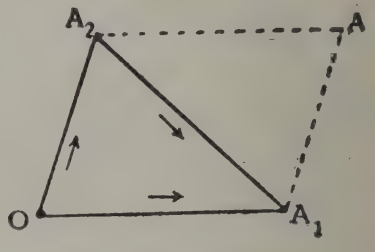


Fig. 9

De una manera general, podemos decir que en el caso de ser propuesto el problema de sumar y restar vectores en forma combinada, podemos reducir el caso a una simple suma de vectores aplicando el concepto de vector opuesto.

36. Descomposición de un vector.—Es evidente, que son infinitas las maneras diferentes como puede considerarse descompuesto un vector en un cierto número de vectores, cuya suma sea, precisamente, el vector dado. De estas infinitas formas diferentes de descomposición de un vector, son dos las de uso corriente.

1ª. Dado un vector, descomponerlo en tres direcciones lineales que no pertenecen a una misma dirección plana.—Sea A_0 un punto cualquiera y construyamos (fig. 10) el punto

(29) $$A = A_0 + \vec{V}$$

Por el punto A_0 tracemos tres rectas orientadas $x_1\ x_2\ x_3$, que individualizan las direcciones dadas. Por el punto A, hagamos pasar planos paralelos a los planos $x_2\ x_3$, $x_1\ x_3$, $x_2\ x_1$, cuyas intersecciones con $x_1\ x_2\ x_3$, las indicaremos con A_1, A_2, A_3, respectivamente.

Estos tres pares de planos paralelos determinan un paralelepípedo de diagonal A_0A y de aristas $\overline{A_0A_u}$, y por lo tanto

(30) $$\vec{V} = \sum_{1}^{3} {}_u\,(A_u - A_0)$$

Los vectores $(A_u - A_0)$, por $u = 1.2.3$ se denominan los *componentes* de $\vec{V}$ según las tres direcciones dadas.

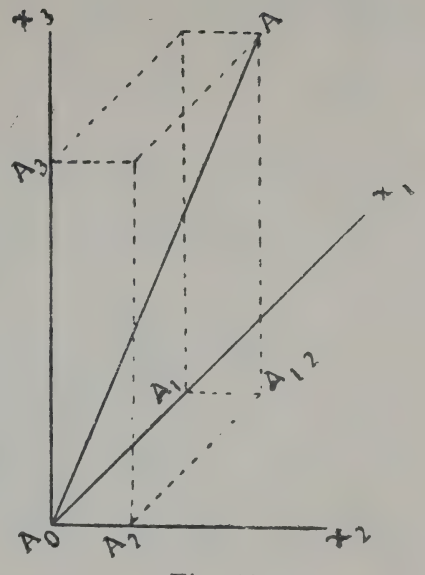


Fig. 10

Si se anula uno de los tres componentes, la dirección de $\vec{V}$ es coplanar a dos de las direcciones dadas; y si se anulan dos, la dirección $\vec{V}$ coincide con la de uno de los ejes.

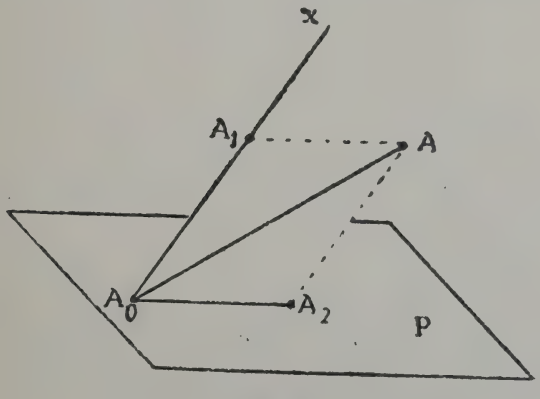


Fig. 11

2ª. *Dado un vector, descomponerlo según una dirección plana y una dirección lineal no perteneciente a la dirección plana.*—Sea A_0 un punto cualquiera y construyamos (fig. 11) el punto

(31) $$A = A_0 + \vec{V}$$

Por el punto A_0 tracemos la recta orientada x y el plano P que indi-

vidualizan la dirección lineal y la dirección plana respectivamente. Por A hagamos pasar un plano paralelo al plano P que interceptará a x en A_1 y, una paralela a x que interceptará al plano P en A_2. El cuadrilátero $A_0 A_1 A A_2$ es un paralelógramo de diagonal $A_0 A$ y de lados $A_0 A_1$, $A_0 A_2$, luego.

$$(32) \qquad \overrightarrow{V} = A - A_0 = \sum_{1u}^{2} (A_u - A_0)$$

los vectores $A_1 - A_0$, $A_2 - A_0$ se denominan los *componentes* de $\overrightarrow{V}$ según la dirección lineal y la dirección plana dadas.

§ 3. Versores,—Producto escalar.—Producto vectorial.—Producto mixto.—Producto vectorial doble.

37. Versor.—Es el vector que tiene por módulo 1, correspondiendo la dirección y el sentido a un vector cualquiera en el espacio.

Sea $\overrightarrow{V}$ un vector cualquiera en un universo enedimensional representemos por $\overrightarrow{\Phi_n}$ el vector que tiene por módulo 1 que corresponde al vector $\overrightarrow{V}$ se denota el versor por

$$\text{vers } \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\Phi_n}$$

y el módulo de $\overrightarrow{V}$ por

$$\text{mod } \overrightarrow{V} = V$$

entonces el vector $\overrightarrow{V}$ queda expresado por

$$\text{vector } \overrightarrow{V} = \text{vers } \overrightarrow{V}. \text{ mod } \overrightarrow{V}$$

Cuando el versor corresponde a cada uno de los ejes orientados de una terna cartesiana de referencia se denominan a estos versores los *versores fundamentales de la terna.*

ESTRUCTURA DE LOS VERSORES

38. Universo bidimensional.—Sea el versor $A - O - \overrightarrow{\Phi_2}$ (fig. 12) a partir del punto O construyamos el punto A determinando el segmento orientado $\overline{OA}$ que individualiza al versor $\overrightarrow{\Phi_1}$. Asi mismo según los ejes rectangulares OX_u por $u = 1.2$ construyamos los segmentos orientados Oa_u $u = 1.2$ que individualizan a los versores $\bar{\imath}_u$ $u = 1.2$ respectivamente, las componentes de 1 según las direcciones orientadas de los ejes Ox_u serán cos α_u $u = 1.2$ entonces el versor $\overrightarrow{\Phi_2}$ estará dado por la ecuación geométrica

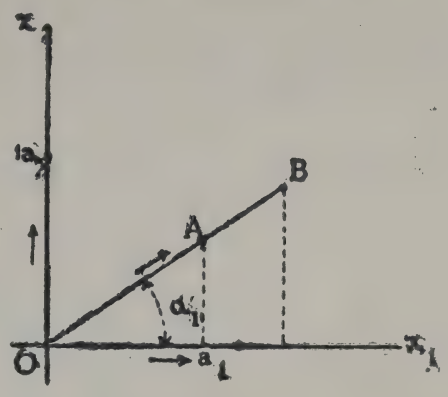


Fig. 12

$$\overrightarrow{\Phi_1} = \sum_{1\,u}^{2} \bar{\imath}_u \cos \alpha_u \qquad (32)$$

Para un módulo V las componentes serán x_u $u = 1.2$ el vecta $\overrightarrow{V} = \Phi_2 \overrightarrow{V}$ estará expresado por la ecuación geométrica

$$\overrightarrow{V} = \sum_{1\,u}^{2} \bar{\imath}_u x_u \qquad (33)$$

Ahora como $\bar{\imath}_2 = i\,\bar{\imath}_1$ siendo $i = \pm \sqrt{-1}$

$$\overrightarrow{\Phi_2} = \bar{\imath}_1 (\cos \alpha_1 + i \cos \alpha_2) \qquad (34)$$

o bien como

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$$

$$\overrightarrow{\Phi_2} = \bar{\imath}_1 e^{i\alpha_1} \qquad (35)$$

luego un vector cualquiera se expresará por

$$\overrightarrow{V} = \bar{\imath}_1 e^{i\alpha_1} V$$

39. Universo tridimensional.—Sea el versor $A - O = \overrightarrow{\Phi_3}$ (fig. 13) a partir del punto O construyamos el punto A determinando el segmento orientado $\overline{OA}$ que individualiza al versor $\overrightarrow{\Phi_3}$. Del mismo modo según los ejes rectangulares Ox_u por $u = 1.2.3$ construyamos los segmentos orientados Oa_u $u = 1.2.3$ que individualizan a los versores $\imath_u$ $u = 1.2.3$ respectivamente, las componentes de 1 segun las direcciones orientadas de los ejes Ox_u $u = 1.2.3$ serán cos α_u por $u = 1.2.3$, entonces el versor $\overrightarrow{\Phi_3}$ estará dado por la ecuación geométrica

$$\overrightarrow{\Phi_3} = \sum_{1\,u}^{3} \imath_u \cos \alpha_u \tag{36}$$

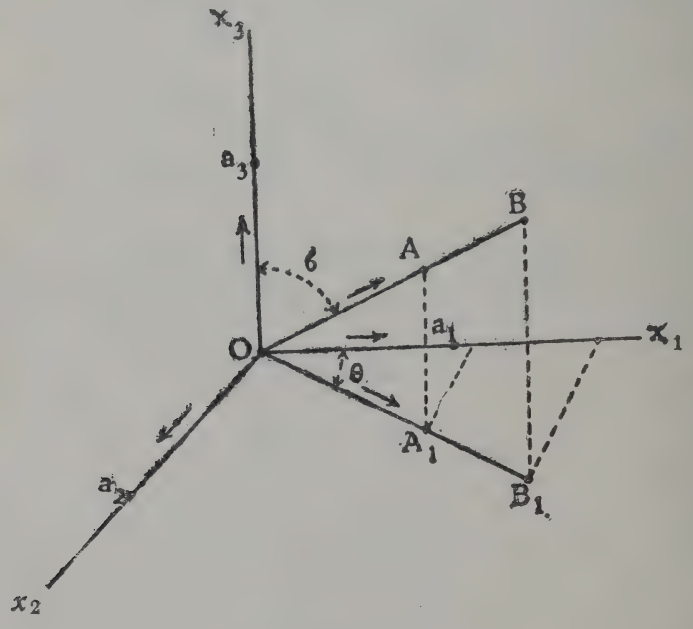


Fig. 13

Para un módulo V las componentes serán x_u por $u = 1.2.3$ el vector $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\Phi_3}\, V$ estará expresado por la ecuación geométrica

$$\overrightarrow{V} = \sum_{1\,u}^{3} \imath_u\, x_u \tag{37}$$

Otra forma de expresar el versor $\vec{\Phi}_3$ es usando las coordenadas esféricas, téngase presente que

(38) $\cos \alpha_1 = \cos \theta \operatorname{sen} \delta \quad \cos \alpha_2 = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \delta \quad \cos \alpha_3 = \cos \delta$

entonces la (37) se transforma en la

(39) $$\vec{\Phi}_3 = \bar{\imath}_1 \cos \theta \operatorname{sen} \delta + \bar{\imath}_2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \delta + \bar{\imath}_3 \cos \delta$$

por ser $\bar{\imath}_2 = i\,\bar{\imath}_1 \qquad i = \pm\sqrt{-1}$

(40) $$\vec{\Phi}_3 = i_1 (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \delta + \bar{\imath}_3 \cos \delta$$

(41) o bien $$\vec{\Phi}_3 = \bar{\imath}_1 e^{i\theta} \operatorname{sen} \delta + \bar{\imath}_3 \cos \delta$$

(42) y como en él plano $\vec{\Phi}_2 = \bar{\imath}_1 e^{i\theta}$ se tendrá

para la medida en el espacio tridimensional

(43) $$\vec{\Phi}_3 = \vec{\Phi}_2 \operatorname{sen} \delta + \bar{\imath}_3 \cos \delta$$

40. Universo cuatridimensional.—Consideremos las tres coordenadas espaciales involucradas en la misma dirección orientada del eje x y sea otra dirección orientada imaginaria perpendicular a las anteriores tal como la determinada por el eje x_4 perpendicular al anterior eje x. El versor $A - O = \vec{\Phi}_4$ es el que nos permite medir en el universo cuadrimensional. A partir del punto O construyamos el punto A determinando el segmento orientado $\overline{OA}$ que individualiza al versor $\vec{\Phi}_4$. Del mismo modo según los ejes rectangulares Ox y Ox_4. Construyamos los segmentos orientados $\overline{Oa_u}$ por $u = 1.2.$ que

están individualizando a los versores $\vec{\Phi}_3$ e $\imath_4$ respectivamente. Las componentes de *1* según las direcciones orientadas de los ejes Ox y Ox_4 estarán expresadas por los cosenos y senos hiperbólicos. Las funciones hiperbólicas son las que permiten la representación puesto que como hemos dicho el cuarto eje Ox_4 es imaginario así como el ángulo λ que forma el segmento orientado $\overline{OA}$ con el eje Ox. Asi tendremos

$$\vec{\Phi}_4 = \vec{\Phi}_3 \cos h\,\lambda + \imath_4 \operatorname{sen} h\,\lambda \tag{44}$$

Para un módulo cualquiera tal como V el vector estará expresado por

$$\vec{V} = \vec{\Phi}_4\, V \tag{45}$$

Al universo cuatrodimensional se le denomina Universo de Minkowski.

41. Producto escalar.—Se denomina producto escalar o interno de dos vectores al producto de sus módulos o de sus valores absolutos por el coseno del ángulo que forman. Es positivo o negativo según que el ángulo formado sea menor o mayor que $\frac{\pi}{2}$ (fig.14)

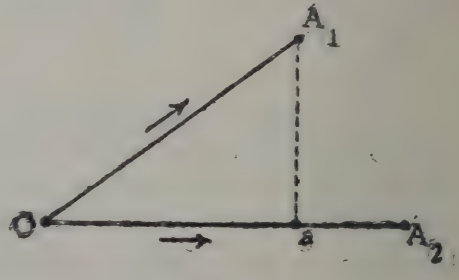


Fig. 14

Sean los vectores no paralelos $A_u - O = \vec{V}_u$ por $u = 1.2$ a partir del punto O construyamos los puntos $A_u = O + \vec{V}_u$ determinando los segmentos orientados $\overline{OA}_u$ proyectando ortogonalmente uno de los vectores sobre el otro determinando así el componente, el producto escalar queda definido por

$$(46) \qquad \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = V_1 V_2 \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

que precisa la fórmula geométrica del paralelogramo que determinan los dos vectores.

42. Expresión cartesiana del producto escalar.—Si se expresan por X_u y Y_u por $u = 1.2.3$ los componentes de los vectores V_u respectivamente según n° 19 (fórmula 8) se tiene

$$(47) \qquad \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \sum_{1}^{3}{}_u X_u Y_u$$

43. Cuadrado de un vector.—El cuadrado de un vector es igual al cuadrado de su módulo, puesto que $\vec{V}_2 = \vec{V}_1$; $X_u = Y_u$ por $u = 1.2.3$ entonces será

$$(48) \qquad \vec{V}_1 \times \vec{V}_1 = \vec{V}_1^2 = V_1^2 = \sum_{u}^{3} X^2_u$$

44. Casos particulares.—El producto escalar está definido por el producto de tres factores V_1, V_2, $\cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ luego los casos particulares se derivan de los valores que tomen dichos factores.

a). Si uno de los vectores es cero el producto escalar será cero.

b). Si los vectores son perpendiculares entre sí, su producto escalar será cero, puesto que

$$\cos(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

45. Propiedades de que goza el producto escalar.—Dedúcese tanto de la definición de producto escalar como de la expresión cartesiana, las propiedades siguientes:

1ª. Propiedad.—Si n es un número real cualquiera.

$$n\,(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2) = (n\,\overline{V}_1) \times \overline{V}_2 = \overline{V}_2 \times (n\,\overline{V}_1)$$

2ª. Propiedad conmutativa.—Es evidente que

$$\overline{V}_1 \times \overline{V}_2 = \overline{V}_2 \times \overline{V}_1$$

puesto que $\cos\,(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2) = \cos\,(-\overline{V}_2 \times \overline{V}_1)$

3ª. Propiedad distributiva.—En efecto debe ser:

$$\overline{V} \times \sum_{1\,u}^{n} \overline{V}_u = \sum_{1\,u}^{n} \overline{V} \times \overline{V}_u$$

Se demuestra considerando los versores fundamentales que corresponden a una terna ortogonal tales como los $\bar{\imath}_u$ por $u = 1.2.3.$

Los componentes de los vectores $\overline{V}_u$ según los versores fundamentales $\bar{\imath}_u$ de una terna $oxyz$ se deducen como se ha hecho anteriormente

$$X = \bar{\imath}_1 \times \sum_{u}^{n} \overline{V}_u \qquad Y = \bar{\imath}_2 \times \sum_{1\,u}^{n} \overline{V}_u \qquad Z = \bar{\imath}_3 \times \sum_{1\,u}^{n} \overline{V}_u$$

Además

$$X_u = i_1 \times \overrightarrow{V_u} \qquad Y_u = i_2 \times \overrightarrow{V_u} \qquad Z_u = i_3 \times \overrightarrow{V_u}$$

como hemos visto en el n°. 23

$$X = \sum_{1}^{n} X_u \qquad Y = \sum_{1}^{n} Y_u \qquad Z = \sum_{1}^{n} Z_u$$

sustituyendo en estas últimas los valores anteriores y multiplicando por los módulos se obtiene

$$\overline{X} \times \sum_{1}^{n} \overrightarrow{V_u} = \sum_{1}^{n} \overline{X} \times \overrightarrow{V_u}$$

$$\overline{Y} \times \sum_{1}^{n} \overrightarrow{V_u} = \sum_{1}^{n} \overline{Y} \times \overrightarrow{V_u}$$

$$\overline{Z} \times \sum_{1}^{u} \overrightarrow{V_u} = \sum_{1}^{u} \overline{Z} \times \overrightarrow{V_u}$$

que demuestra la propiedad *distributiva*

46. Propiedades del producto escalar de los versores fundamentales de una terna cartesiana ortogonal.—Cuando los vectores no son ortogonales su producto escalar $\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2}$ será positivo o negativo según que el ángulo que forman sea agudo u obtuso. La expresión (46) considerando en ella que $\overrightarrow{\chi_1}$ y $\overrightarrow{\chi_2}$ representan los versores correspondientes a los vectores $\overrightarrow{V_1}$ y $\overrightarrow{V_2}$ se tiene

$$\vec{V}_1 = \vec{\chi}_1 V_1 \qquad \vec{V}_2 = \vec{\chi}_2 V_2 \qquad \vec{\chi}_1 \times \vec{\chi}_2 = \cos(\vec{\chi}_1, \vec{\chi}_2)$$

para $V_1 = V_2 = 1$ las proyecciones o la medida de las componentes serán

$$X_u = \cos \alpha_u \qquad Y_u = \cos \beta_u \qquad u = 1.2.3$$

por lo tanto la (46) se puede escribir así:

$$\vec{\chi}_1 \times \vec{\chi}_2 = \sum_{1}^{3} \cos \alpha_u \cos \beta_u = \cos(\vec{\chi}_1, \vec{\chi}_2)$$

Cuando el ángulo $(\vec{\chi}_1, \vec{\chi}_2) = 0°$, los dos versores son iguales.

$\vec{\chi}_1 \times \vec{\chi}_1 = 1$ luego es evidente que $\vec{V}_1 \times \vec{V}_1 = V_1^2$

el producto escalar de dos vectores iguales coincide con el cuadrado de su longitud o del módulo.

Cuando el ángulo $(\vec{\chi}_1, \vec{\chi}_2) = \frac{\pi}{2}$ los dos versores son ortogonales, entonces

$$\vec{\chi}_1 \times \vec{\chi}_2 = 0 \qquad \text{luego} \qquad \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = 0$$

Sean los versores fundamentales de una terna ortogonal $\vec{\iota}_u$ por $u = 1.2.3$ se deduce inmediatamente que

$$(49) \qquad \vec{\iota}_i \times \vec{\iota}_j = \begin{cases} 1 \text{ para } i = j \\ 0 \quad \text{„} \quad i \neq j \end{cases}$$

47. Producto vectorial.—Se denomina producto vectorial o externo de dos vectores al vector cuyo módulo es el producto de los módulos de los vectores por el seno del ángulo que forman, es decir que el módulo define el área del paralelógramo de los vectores (fig. 15).

Sean dos vectores no paralelos determinados en el orden en que sean dados, sobre un plano o todos los que tengan la misma dirección plana y un sentido de rotación, dichos vectores serán $A_u - O = \overrightarrow{V_u}$ por $u = 1.2$ A partir de un punto cualquiera O sobre un mismo plano construyamos los puntos $A_u = O + \overrightarrow{V_u}$ determinando los segmentos orientados $\overline{OA_u}$, considerando que pueda rotar el segmento orientado $\overline{OA}_1$ al rededor de la perpendicular en O a una misma dirección plana describiendo un ángulo no mayor que π hasta colocarse sobre el segmento orientado $\overline{OA}_2$ de manera que pueda también realizarse por una rotación en sentido contrario del segmento orientado $\overline{OA}_2$ sobre el $\overline{OA}_1$.

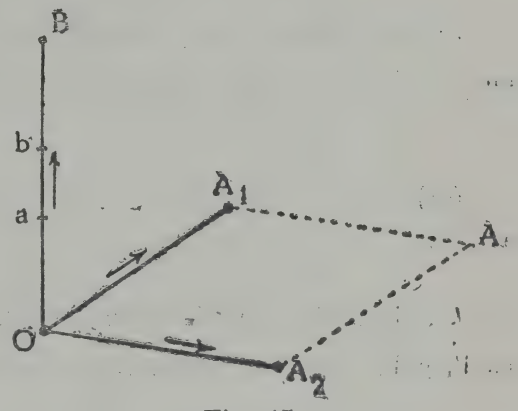


Fig. 15

El ente geométrico abstracto que puede hacerse corresponder al área orientada de los ∞^3 paralelógramos equipolentes trazados por los ∞^3 puntos del espacio se denomina producto vectorial, que determina un vector tal como lo habíamos definido anteriormente.

$$(50) \qquad B - O = \overrightarrow{G} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{i_n}\ V_1\ V_2\ \text{sen}\ (\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$$

El módulo de este vector (bivector) será $V_1\ V_2\ \text{sen}\ (\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$ que expresa el área del paralelógramo de los dos vectores y $b - a = \overrightarrow{i_n}$ es el vector unidad individualizado por el segmento orientado $\overline{ab}$ según la perpendicular al plano o a la dirección plana determinada por los dos vectores.

48. Casos particulares.—El producto vectorial será nulo en los casos siguientes:

a) Cuando uno de los vectores sea igual a cero.

b) Cuando los vectores sean paralelos porque entonces el el ángulo $(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0^\circ$ y como consecuencia

$$\text{sen } (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0$$

Si los vectores son perpendiculares entre si sen $(\vec{V}_1, \vec{V}_2) =$ sen $\frac{\pi}{2} = 1$ su producto vectorial será

(51) $$\vec{G} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{i}_n \; V_1 \; V_2$$

49. Expresión cartesiana del producto vectorial.—Sean los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ que determinan el producto vectorial

$$\vec{G} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{i}_n \; V_1 \; V_2 \text{ sen } (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

Las componentes rectangulares de los vectores son $G_u \; X_u \; Y_u$ por $u = 1.2.3$ con respecto a la terna definida por los versores fundamentales $\vec{i}_u$ por $u = 1.2.3$

(52) Evidentemente $$\vec{G} = \sum_{1\,u}^{3} \vec{i}_u \; G_u$$

(53) $$\vec{V}_1 = \sum_{1\,u}^{3} \vec{i}_u \; X_u \qquad \vec{V}_2 = \sum_{1\,u}^{3} \vec{i}_u \; Y_u$$

el producto escalar deducido de las anteriores será

$$\overline{G} \times \overline{V_1} = \sum_{1\,u}^{3} G_u\, X_u = 0$$

(54)

$$\overline{G} \times \overline{V_2} = \sum_{1\,u}^{3} G_u\, Y_u = 0$$

dividiéndolas se tiene

$$\frac{G_1}{G_3} X_1 + \frac{G_2}{G_3} X_2 + X_3 = 0$$

(55)

$$\frac{G_1}{G_3} Y_1 + \frac{G_2}{G_3} Y_2 + Y_3 = 0$$

o abreviadamente

(56) $$\sum_{1\,u}^{3} \frac{G_u}{G_3} X_u = 0 \qquad \sum_{1\,u}^{3} \frac{G_u}{G_3} Y_u = 0$$

Resolviendo este sistema con respecto á $\frac{G_1}{G_3}$ y $\frac{G_2}{G_3}$

(57) $$\frac{G_1}{G_3} = \frac{X_2 Y_3 - X_3 Y_2}{X_1 Y_2 - X_2 Y_1} \qquad \frac{G_2}{G_3} = \frac{X_3 Y_1 - X_1 Y_3}{X_1 Y_2 - X_2 Y_1}$$

o también

$$(58) \qquad \frac{G_1}{X_2 Y_3 - X_3 Y_2} = \frac{G_2}{X_3 Y_1 - X_1 Y_3} = \frac{G_3}{X_1 Y_2 - X_2 Y_1} = \rho$$

llamando ρ a esta relación constante se deduce

$$(59) \qquad G_1 = \rho\,(X_2 Y_3 - X_3 Y_2); \qquad G_2 = \rho\,(X_3 Y_1 - X_1 Y_3);$$

$$G_3 = \rho\,(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)$$

elevándolas al cuadrado y sumándolas se obtiene

$$(60) \qquad \sum_{1\,u}^{3} G^2_u = V_1^2\, V^2_2\, \operatorname{sen}^2 (\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) = \rho^2\,[(X_2 Y_3 - X_3 Y_2)^2 +$$

$$+ (X_3 Y_1 - X_1 Y_3)^2 + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)^2]$$

La expresión que está dentro del corchete puede ser escrita así

$$(61) \qquad V^2_1\, V_2^2\, \operatorname{sen}^2 (\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) = \rho^2\,\left[\sum_{1\,u}^{3} X^2_u \sum_{1\,u}^{3} Y^2_u - \left\{\sum_{1\,u}^{3} X_u\, Y_u\right\}^2\right]$$

pero como $\qquad V_1^2 = \sum_{1\,u}^{3} X^2_u \qquad\qquad V_2^2 = \sum_{1\,u}^{3} Y^2_u$

$$\sum_{1\,u}^{3} X_u\, Y_u = V_1\, V_2 \cos (\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$$

entonces se tendrá $\rho = \pm 1$

Para salvar la ambigüedad del signo de ρ obsérvese que dicho signo no puede cambiar cuando los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ varían de manera continua puesto que el vector $\vec{G}$ solamente pasará por cero, cuando se pasa de una a la otra de las dos genéricas determinaciones para $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ y se puede verificar esto de infinitos modos.

En efecto si consideramos que $\vec{V}_u = \bar{\imath}_u$ por $u = 1.2.$ que representan los versores fundamentales de una terna rectangular evidentemente la expresión (51) se reduce a $\vec{G} = \bar{\imath}_3$ es decir

$$\bar{\imath}_3 = \bar{\imath}_1 \wedge \bar{\imath}_2$$

y la expresión (61) nos hace conocer que ρ debe ser en tal caso $\rho = 1$

De manera que las componentes del producto vectorial estarán dadas por las

$$(62) \qquad G_1 = X_2 Y_3 - X_3 Y_2; \qquad G_2 = X_3 Y_1 - X_1 Y_3;$$

$$G_3 = X_1 Y_2 - X_2 Y_1$$

o abreviadamente $G_k = X_i Y_j - X_j Y_i$

$$k \neq i \neq j = 1.2.3$$

verificando una permutación cíclica.

Introduciendo los versores fundamentales de la terna i_u por $u = 1.2.3$

La expresión del producto vectorial al introducir los versores fundamentales es

$$(63) \qquad \vec{G} = \sum_{1\,u}^{3} \vec{G}_u = \bar{\imath}_1 (X_2 Y_3 - X_3 Y_2) + \bar{\imath}_2 (X_3 Y_1 - X_1 Y_3) +$$

$$+ \bar{\imath}_3 (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)$$

o bien por el determinante

$$(64) \qquad \vec{G} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \bar{\imath}_1 & \bar{\imath}_2 & \bar{\imath}_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\imath}_u & u = 3 \\ X_u & \\ Y_u & u = 1 \end{vmatrix}$$

El módulo será

$$(65) \qquad V_1 V_2 \operatorname{sen} (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha_u & u = 3 \\ X_u & \\ Y_u & u = 1 \end{vmatrix}$$

50. Propiedades de que goza el producto vectorial.

1°. De la definición de producto vectorial así como de su expresión cartesiana se deduce que el producto vectorial no obedece a la prepiedad *conmutativa* es decir que si se cambia el órden de los vectores $\overline{V}_1$ y $\overline{V}_2$ se determina un vector opuesto

$$\overline{G} = \overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2 = -\overline{V}_2 \wedge \overline{V}_1 = -\varepsilon_n V_2 V_1 \operatorname{sen} (\overline{V}_2 . \overline{V}_1)$$

debido a que el seno cambia de signo con el ángulo.

2°. Si m y n representan dos números reales cualesquiera se debe tener

$$m n \overline{G} = m \overline{V}_1 \wedge n \overline{V}_2 = m n \overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2$$

Lo que es evidente puesto que los vectores de ambos miembros tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

3°. Sea el producto vectorial $\overline{G} = \overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2$ imaginemos (fig. 16) la dirección plana perpendicular al vector $A_1 - O = \overline{V}_1$ el componente sobre dicha dirección plana del vector $A_2 - O = \overline{V}_2$ será

$$A_o - O = \overline{V}_o \qquad \text{siendo}$$

$$V_o = V_2 \operatorname{sen} (\overline{V}_1 , \overline{V}_2)$$

multiplicando por V_1

$$V_1 V_o = V_1 V_2 \text{ sen } (\overline{V}_1, \overline{V}_2)$$

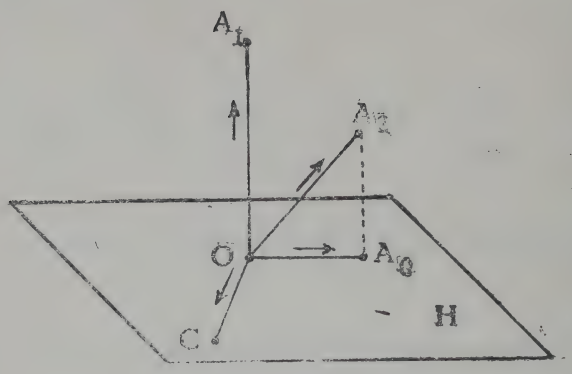


Fig. 16

ahora como

$$\overline{G} = \overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2 = \bar{\imath}\, V_1 V_2 \text{ sen } (\overline{V}_1, \overline{V}_2) = \bar{\imath}\, V_1 V_o \tag{66}$$

$$\bar{\imath} = i\, \bar{\imath}_o \qquad\qquad i = \pm \sqrt{-1}$$

$$\overline{G} = i\, V_1\, \overline{V}_o \tag{67}$$

Nos dice que el producto vectorial de dos vectores está expresado por el producto del módulo V_1 de uno por el componente $\overline{V}_o$ del otro sobre la dirección plana perpendicular al vector $\overline{V}_1$ y multiplicado por un operador i.

Consideremos en general que sean $n + 1$ los vectores tales que se realice

$$\overline{V} \wedge \sum_{1\,u}^{n} \overline{V}_u = \sum_{1\,u}^{n} \overline{V} \wedge \overline{V}_u \tag{68}$$

lo que se demuestra por el siguiente procedimiento, téngase presente que

$$\overline{V} \wedge \sum_{1\,u}^{n} \overline{V}_u = V . \sum_{1\,u}^{n} \bar{\imath}_u \, V_{ou} \tag{69}$$

pero como $\bar{\imath}_u = i\,\bar{\imath}_{ou}$ entonces

$$\overline{V} \wedge \sum_{1\,u}^{n} \overline{V}_u = i\,V \sum_{1\,u}^{n} \overline{V}_{ou} \tag{70}$$

además $i\,V\,\overline{V}_{ou} = \overline{V} \wedge \overline{V}_u$ por $u = 1.2.3 \cdots n$

inmediatamente se de deduce

$$\overline{V} \wedge \sum_{1\,u}^{n} \overline{V}_u = \sum_{1\,u}^{n} \overline{V} \wedge \overline{V}_u \tag{71}$$

que demuestra la *propiedad distributiva* del producto vectorial.

51. Propiedades del producto vectorial de los versores fundamentales de una terna ortogonal.—La expresión del producto vecforial

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{\imath}_u V_1 V_2 \operatorname{sen} (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

teniendo presente que

$$\vec{V}_1 = \vec{\chi}_1 V_1 \qquad \vec{V}_2 = \vec{\chi}_2 V_2$$

facilmente se deduce

$$\vec{\chi}_1 \wedge \vec{\chi}_2 = \vec{\imath}_u \operatorname{sen} (\vec{\chi}_1, \vec{\chi}_2)$$

cuando el ángulo $(\vec{\chi}_1, \vec{\chi}_2) = 0^o$

$$\vec{\chi}_1 \times \vec{\chi}_2 = 0 \qquad \text{luego} \qquad \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 0$$

cuando el ángulo $(\vec{\chi}_1, \vec{\chi}_2) = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{\chi}_1 \wedge \vec{\chi}_2 = \vec{\imath}_u \qquad \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{\imath}_u V_1 V_2$$

Para una terna ortogonal denominando $\vec{\imath}_u$ por $u = 1.2.3$ los versores fundamentales de la terna se tiene por permutación cíclica de los índices

$$(72) \qquad \bar{\imath}_i \wedge \bar{\imath}_j = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad i = j \\ \bar{\imath}_k & \text{,,} \quad i \neq j \neq k \end{cases}$$

o bien

$$(73) \qquad \bar{\imath}_j \wedge \bar{\imath}_i = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad j = i \\ -\bar{\imath}_k & \text{,,} \quad j \neq i \neq k \end{cases}$$

52. Forma explícita de los productos escalar y vectorial de los versores fundamentales de una terna ortogonal.—Las expresiones abreviadas (49) y (72) en forma explícita serán

$$\bar{\imath}_1 \times \bar{\imath}_1 = \bar{\imath}_1^2 = 1 \qquad \bar{\imath}_2 \times \bar{\imath}_2 = \bar{\imath}_2^2 = 1 \qquad \bar{\imath}_3 \times \bar{\imath}_3 = \bar{\imath}_3^2 = 1$$

$$\bar{\imath}_1 \times \bar{\imath}_2 = 0 \qquad \bar{\imath}_3 \times \bar{\imath}_1 = 0 \qquad \bar{\imath}_2 \times \bar{\imath}_3 = 0$$

$$\bar{\imath}_1 \wedge \bar{\imath}_1 = 0 \qquad \bar{\imath}_2 \wedge \bar{\imath}_2 = 0 \qquad \bar{\imath}_3 \wedge \bar{\imath}_3 = 0$$

$$\bar{\imath}_1 \wedge \bar{\imath}_2 = \bar{\imath}_3 \qquad \bar{\imath}_3 \wedge \bar{\imath}_1 = \bar{\imath}_2 \qquad \bar{\imath}_2 \wedge \bar{\imath}_3 = \bar{\imath}_1$$

$$\bar{\imath}_2 \wedge \bar{\imath}_1 = -\bar{\imath}_3 \qquad \bar{\imath}_1 \wedge \bar{\imath}_3 = -\bar{\imath}_2 \qquad \bar{\imath}_3 \wedge \bar{\imath}_2 = -\bar{\imath}_1$$

53. Producto mixto.—Se denomina producto mixto de tres vectores al producto de sus módulos por el seno del ángulo que forman dos de ellos y por el coseno del ángulo que forma el tercero con la normal a la dirección plana determinada por los dos primeros. El producto mixto de tres vectores define un escalar.

Sean los tres vectores no coplanares

$$A_u - O = \overline{V}_u \qquad u = 1.2.3$$

a partir de un punto cualquiera O construyamos los puntos

$$A_u = O + \overline{V}_u \qquad u = 1.2.3$$

determinando así los segmentos orientados $\overline{OA}_u$ que individualizan a los vectores considerados. El producto vectorial de $\overline{V}_2 \wedge \overline{V}_3$ sabemos que tiene por módulo el área del paralelogramo determinado por dichos vectores, es decir

$$\overline{G} = \overline{V}_2 \wedge \overline{V}_3 = \overline{\iota}_n \; V_2 \, V_3 \operatorname{sen} (\overline{V}_2, \overline{V}_3)$$

el vector $\overline{G}$ es perpendicular al área determinada por V_2 y V_3

El producto escalar del tercer vector $\overline{V}_1$ por el $\overline{G}$ define el producto mixto

$$\overline{P} = \overline{V}_1 \times \overline{G} = \overline{V}_1 \times \overline{V}_2 \wedge \overline{V}_3 \tag{74}$$

o bien

$$P = \overline{\tau} \times \overline{\iota}_n \; V_1 \, V_2 \, V_3 \operatorname{sen} (\overline{V}_2, \overline{V}_3)$$

y como

$$\vec{\tau} \times \vec{\imath_n} = \cos(\vec{V_2}, \vec{\imath_n})$$

se tendrá

$$P = V_1 V_2 V_3 \operatorname{sen}(\vec{V_2}, \vec{V_3}) \cos(\vec{V_1}, \vec{\imath_n}) \tag{75}$$

teniendo presente que

$$V_2 V_3 \operatorname{sen}(\vec{V_2}, \vec{V_3}) = \Omega$$

$$V_1 \cos(\vec{V_1}, \vec{\imath_n}) = h$$

La (75) se podrá escribir asi

$$P = \Omega . h \tag{76}$$

siendo Ω el área del paralelogramo y h la altura

Como se observa el volúmen P del paralelepípedo es seis veces el del tetraedro T, entonces

$$T = \tfrac{1}{6} P$$

Casos de producto mixto nulo.

1°. Cuando uno de los vectores es nulo.

2°. Cuando los tres vectores son paralelos a una dirección plana o coplanares.

3°.—El producto mixto no se altera si se permutan sus factores.

54. Expresión cartesiana del producto mixto.—Sean los tres vectores no coplanares

$\overline{V_u}$ por $u = 1.2.3$ las componentes rectangulares

X_u, Y_u, Z_u por $u = 1.2.3$ sabemos (64) que el producto vectorial

$$\overline{G} = \overline{V_2} \wedge \overline{V_3} = \begin{vmatrix} \bar{\imath}_1 & \bar{\imath}_2 & \bar{\imath}_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} \tag{78}$$

Sean G_u las tres componentes rectangulares del vector $\overline{G}$, el producto escalar es (47)

$$P = \overline{V_1} \times \overline{G} = \sum_{1}^{3} {}_u X_u G_u \tag{79}$$

G_u por $u = 1.2.3$ está dado, como sabemos, por una permutación cíclica

$$G_k = Y_i Z_j - Y_j Z_i \qquad i \neq j \neq k \tag{80}$$

entonces, en tal virtud, el producto mixto podrá expresarse por el determinante

$$(81)\quad P = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} X_1X_2X_3 \\ Y_1Y_2Y_3 \\ Z_1Z_2Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1Y_2Y_3 \\ Z_1Z_2Z_3 \\ X_1X_2X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_1Z_2Z_3 \\ X_1X_2X_3 \\ Y_1Y_2Y_3 \end{vmatrix}$$

55. Propiedades del producto mixto.—El producto mixto de tres vectores

$$P = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$$

Como sabemos, puede escribirse

$$P = \vec{V}_1 \times \vec{Q}$$

1°. Como el producto escalar obedece a la ley conmutativa, podemos escribir así

$$P = \vec{Q} \times \vec{V}_1$$

entonces

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \times \vec{V}_3$$

debido a la propiedad conmutativa del producto escalar, se tiene:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \times \vec{V}_3 = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \times \vec{V}_3 = \vec{V}_3 \times (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$$

Ahora el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores no coplanares puede ser positivo o negativo según que $\vec{V}_1$ forme con la dirección de la perpendicular a la dirección plana de $\vec{V}_2$ y $\vec{V}_3$ orientada según el sentido del giro $(\vec{V}_2, \vec{V}_3)$ un ángulo agudo u obtuso. Luego, el volumen es positivo si los tres vectores $\vec{V}_1$ $\vec{V}_2$ $\vec{V}_3$ forman un sistema llamado directo

Si los tres vectores forman un sistema directo, los vectores han de tomarse en tal orden que su sistema sea tambien directo y esto se obtiene cuando se permutan circularmente dichos vectores, así tendremos que se verifica

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \times \vec{V}_3 = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \times \vec{V}_3 = \vec{V}_3 \times (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) =$$

$$= \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$$

expresa que se puede permutar entre sí los signos $\times$ y $\wedge$ sin que altere el resultado.

2°. El producto mixto permite verificar una permutación cíclica en sus factores.

En efecto, la anterior propiedad inmediatamente nos conduce a demostrarlo

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \vec{V}_1 \times (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \times \vec{V}_1 =$$

$$= \vec{V}_2 \times \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1$$

3°. En general, en virtud de las propiedades anteriores, podemos escribir

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \vec{V}_2 \times \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1 = \vec{V}_3 \times \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 =$$

$$= \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \times \vec{V}_3 = \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 \times \vec{V}_1 = \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1 \times \vec{V}_2$$

4°. *Cambio de signo del producto mixto.*—Si en el producto mixto verificamos la permutación de los factores, solamente habrá que atender al cambio de signo, así

$$\vec{V}_1 \times (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \times (-\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2) = -\vec{V}_1 \times \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2$$

y en general, por las propiedades anteriores

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = -\vec{V}_1 \times \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_3 \times \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 =$$

$$= -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 \times \vec{V}_3$$

U. OF ILLINOIS

56. Producto mixto ortogonal.—Como la forma explícita del producto mixto es

$$P = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = V_1 V_2 V_3 \operatorname{sen} (\vec{V}_2, \vec{V}_3) \cos (\vec{V}_1, \vec{Q})$$

para que los vectores sean perpendidulares es necesario que el ángulo $(\vec{V}_2, \vec{V}_3) = \frac{\pi}{2}$ y el ángulo $(\vec{V}_1, \vec{Q}) = 0°$; entonces se tiene

$$P = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \pm V_1 V_2 V_3 \tag{82}$$

El producto de los tres vectores unitarios fundamentales $\bar{\imath}_1\ \bar{\imath}_2\ \bar{\imath}_3$

$$\bar{\imath}_1 \times \bar{\imath}_2 \wedge \bar{\imath}_3 \begin{cases} \neq 0 & \text{— no coplanares} \\ = 0 & \text{— coplanares} \\ \pm 1 & \text{— ortogonales} \end{cases} \tag{83}$$

57. Producto vectorial doble.—Se denomina producto vectorial doble de tres vectores al producto vectorial del primero por el vector producto de los otros dos: El producto vectorial doble de tres vectores define un nuevo vector.

Sean los vectores $A_u - O = \vec{V}_u$ por $u = 1.2,3$ construyamos los puntos $A_u = O + \vec{V}_u$ determinando así los segmentos orientados $\overline{OA}_u$ que individualizan a los vectores (fig. 17).

El producto vectorial doble será

(84) $$\vec{D} = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$$

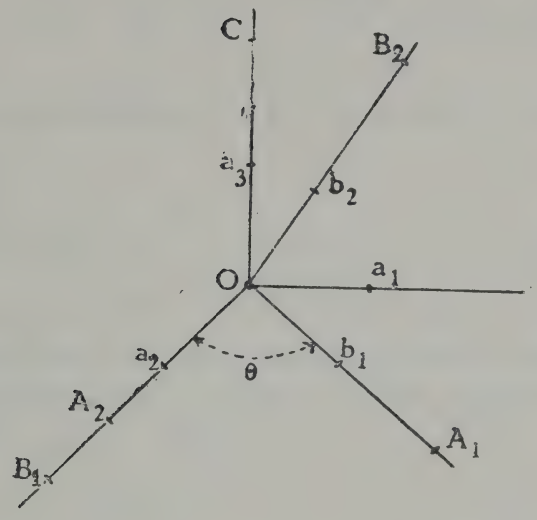


Fig. 17

Sabemos que el producto vectorial $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ define un nuevo vector $C - O$ perpendicular a la dirección plana de los otros dos y el triedro OA_1A_2C será de disposición positiva. Además sabemos que si $a_3 - O = \vec{\iota}_3$

(85) $$C - O = \vec{\iota}_3 \, V_1 \, V_2 \, \text{sen} \, (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

Ahora sobre la normal al plano que determinan los segmentos orientados $\overline{OA_2}$ y $\overline{OC}$ construyamos el punto $a_1 = O + \vec{\iota}_0$ el

segmento orientado $\overline{Oa_1}$ completa con los segmentos orientados $\overline{OA_2}$ y $\overline{OC}$ un triedro trirectángulo OA_2a_1C de disposición positiva. Sobre la línea de acción del segmento orientado $\overline{OA_2}$ construyamos el punto.

$$B_1 = O + \vec{\imath}_0 \wedge \vec{W} \tag{86}$$

es evidente que el versor $a_2 - O = \vec{\imath}_2$ permite establecer

$$B_1 - O = \vec{\imath}_0 \wedge (C - O) = \vec{\imath}_2\, V_2\, V_1 \operatorname{sen} (\vec{V}_1, \vec{V}_2) \tag{87}$$

Pero los dos triedros OA_2a_1C y OA_2A_1C estan dispuestos positivamente, el ángulo $A_2\widehat{Oa}_1$ es recto y el ángulo $A_1\widehat{Oa}_1$ es agudo

Como $\vec{V}_2 = \vec{\imath}_2\, V_2$ y $V_1 \operatorname{sen} (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \vec{\imath}_0 \times \vec{V}_1$

se deduce de la (87) que

$$B_1 - O = (\vec{\imath}_0 \times \vec{V}_1)\, \vec{V}_2 \tag{88}$$

entonces se tendrá

$$-\vec{\imath}_0 \wedge (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = (\vec{\imath}_0 \times \vec{V}_1)\, \vec{V}_2 - (\vec{\imath}_0 \times \vec{V}_2)\, \vec{V}_1 \tag{89}$$

facilmente se comprueba por la figura que el segundo término del

segundo mienbro es cero. Construyamos ahora el punto $b_2 = O + \vec{j}_0$ determinando el nuevo triedro OA_1B_2C trirectángulo, puesto que el segmento orientado $\overline{OB_2}$ es perpendicular al $\overline{OA_1}$ estando dicho triedro dispuesto positivamente, entonces

$$(90) \qquad -\vec{j}_0 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1) = (\vec{j}_0 \times \vec{V}_2)\,\vec{V}_1 - (\vec{j}_0 \times \vec{V}_1)\,\vec{V}_2$$

o bien

$$(91) \qquad -\vec{j}_0 \wedge (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = (\vec{j}_0 \times \vec{V}_1)\,\vec{V}_2 - (\vec{j}_0 \times \vec{V}_2)\,\vec{V}_1$$

Análogamente podemos escribir

$$(92) \qquad -\vec{\imath}_3 \wedge (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = (\vec{\imath}_3 \times \vec{V}_1)\,\vec{V}_2 - (\vec{\imath}_3 \times \vec{V}_2)\,\vec{V}_1$$

Los versores $\vec{\imath}_0, \vec{j}_0, \vec{\imath}_3$ definen una terna, si representamos por n_u por $u = 1.2.3$ los módulos podremos determinar el vector

$$(93) \qquad \vec{V}_3 = \vec{\imath}_0\, n_1 + \vec{j}_0\, n_2 + \vec{\imath}_3\, n_3$$

Multiplicando respectivamente por n_1, n_2, n_3 las (89), (91), (92) y sumándolas se obtiene

$$(94) \qquad \overline{D} = (\overline{V_1} \wedge \overline{V_2}) \wedge \overline{V_3} = (\overline{V_3} \times \overline{V_1})\,\overline{V_2} - (\overline{V_3} \times \overline{V_2})\,\overline{V_1}$$

Esta fórmula será verdadera sin restricción

Cuando los vectores $\overline{V_1}$ y $\overline{V_2}$ son paralelos será

$$\overline{V_2} = m\,\overline{V_1}$$

entonces

$$(95) \qquad m\,(\overline{V_3} \times \overline{V_1})\,\overline{V_1} - m\,(\overline{V_3} \times \overline{V_1})\,\overline{V_1} = 0$$

58. Relaciones entre los productos escalar y vectorial.

1°. Como sabemos (94)

$$(\overline{V_1} \wedge \overline{V_2}) \wedge \overline{V_3} = (\overline{V_1} \times \overline{V_3})\,\overline{V_2} - (\overline{V_2} \times \overline{V_3})\,\overline{V_1}$$

(96)

$$\overline{V_1} \wedge (\overline{V_2} \wedge \overline{V_3}) = (\overline{V_1} \times \overline{V_3})\,\overline{V_2} - (\overline{V_1} \times \overline{V_2})\,\overline{V_3}$$

La primera expresa el vector $(\overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2) \wedge \overline{V}_3$ que es paralelo al plano de los vectores $\overline{V}_1$ y $\overline{V}_2$ y normal a $\overline{V}_3$.

La segunda se deduce de la primera, teniendo en cuenta que

$$\overline{V}_1 \wedge (\overline{V}_2 \wedge \overline{V}_3) = -(\overline{V}_2 \wedge \overline{V}_3) \wedge \overline{V}_1$$

2°. El producto vectorial

$$(97) \qquad (\overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2) \wedge (\overline{V}_3 \wedge \overline{V}_4) = (\overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2 \wedge \overline{V}_3) \wedge \overline{V}_4 =$$

$$= (\overline{V}_1 \times \overline{V}_3 \wedge \overline{V}_4)\, \overline{V}_2 - (\overline{V}_2 \times \overline{V}_3 \wedge \overline{V}_4)\, \overline{V}_1 =$$

$$= (\overline{V}_4 \times \overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2)\, \overline{V}_3 - (\overline{V}_3 \times \overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2)\, \overline{V}_4$$

3°. El producto escalar

$$(98) \qquad (\overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2) \times (\overline{V}_3 \wedge \overline{V}_4) = \overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2 \times \overline{V}_3 \wedge \overline{V}_4 =$$

$$= (\overline{V}_1 \times \overline{V}_3)\, (\overline{V}_2 \times \overline{V}_4) - (\overline{V}_2 \times \overline{V}_3)\, (\overline{V}_1 \times \overline{V}_4)$$

Como caso particular, cuando

$$\overline{V}_3 = \overline{V}_1 \qquad \overline{V}_4 = \overline{V}_2$$

se tendrá

$$(99) \qquad (\overline{V}_1 \times \overline{V}_2)^2 = \overline{V}_1^2\, \overline{V}_2^2 - (\overline{V}_1 \times \overline{V}_2)^2$$

4°. Entre cuatro vectores cualesquiera $\overline{V}_u$ por $u = 1,2,3,4$ se producen las identidades siguientes:

$$(100) \qquad (\overline{V}_2 \times \overline{V}_3 \wedge \overline{V}_4)\, \overline{V}_1 - (\overline{V}_3 \times \overline{V}_4 \wedge \overline{V}_1)\, \overline{V}_2 +$$

$$+ (\overline{V}_4 \times \overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2)\, \overline{V}_3 - (\overline{V}_1 \times \overline{V}_2 \wedge \overline{V}_3)\, \overline{V}_4 = 0$$

o en otra forma

$$(101) \qquad (\overline{V}_1 \times \overline{V}_2 \wedge \overline{V}_3)\, \overline{V}_4 = (\overline{V}_4 \times \overline{V}_2 \wedge \overline{V}_3)\, \overline{V}_1 +$$

$$+ (\overline{V}_4 \times \overline{V}_3 \wedge \overline{V}_1)\, \overline{V}_2 + (\overline{V}_4 \times \overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2)\, \overline{V}_3$$

En efecto, si se supone que

$$\overline{V}_1 \times \overline{V}_2 \wedge \overline{V}_3 \neq 0$$

es decir que $\overline{V}_u$ por $u = 1,2,3$ no sean paralelos a un mismo

plano, la igualdad anterior expresa un vector cualquiera $\vec{V}_4$ linealmente en función de los vectores $\vec{V}_u$ por $u = 1,2,3$

Si tres vectores cualquiera de los cuatro considerados son paralelos a un mismo plano, las (100) y (101) quedarán verificadas, puesto que los productos mixtos son todos nulos. Cuando $\vec{V}_u$ por $u = 1,2,3$ no son paralelos a un mismo plano, existirán cuatro números x_u por $u = 1,2,3$ y n, siendo $n \neq 0$, los cuales verifican la igualdad

102 $$\sum_{1}^{3} {}_u \, x_u \vec{V}_u + n \vec{V}_4 = 0$$

multiplicando escalarmente ambos miembros por $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$ se tiene

(10) $$x_1 \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 + n \vec{V}_4 \times \vec{V}_2 > \vec{V}_3 = 0$$

análogamente, multiplicando escalarmente por $\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1$ se tiene

$$x_2 \vec{V}_2 \times \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1 + n \vec{V}_4 \times \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1 = 0$$

y por $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ se tiene

$$x_3 \vec{V}_3 \times \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + n \vec{V}_4 \times \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 0$$

que permiten determinar x_u por $u = 1,2,3$.

Si sustituimos los valores de x_u por sus valores así determinados se produce la (101)

5°. Consideremos que $\bar{\imath}_u$ por $u = 1,2,3$ son los versores que definen una terna cualquiera y haciendo $\vec{V}_4 = \vec{V}$ se tiene por la (101)

$$(104) \qquad \vec{V} = \frac{1}{\bar{\imath}_1 \times \bar{\imath}_2 \wedge \bar{\imath}_3} \left\{ \bar{\imath}_1 (\vec{V} \times \bar{\imath}_2 \wedge \bar{\imath}_3) + \bar{\imath}_2 (\vec{V} \times \bar{\imath}_3 \wedge \bar{\imath}_1) + \right.$$

$$\left. + \bar{\imath}_3 (\vec{V} \times \bar{\imath}_1 \wedge \bar{\imath}_2) \right\}$$

6°. En el caso particular de una terna ortogonal, $\bar{\imath}_u$ serán los versores fundamentales que definen dicha terna. Teniendo en cuenta las propiedades de tales versores, se obtiene

$$(105) \qquad \vec{V} = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u (\vec{V} \times \bar{\imath}_u)$$

7°. Cuando $\vec{V}$, $\bar{\imath}_u$ por $u = 1,2$ son vectores paralelos a un mismo plano, no siéndolo $\bar{\imath}_u$ é $\bar{\imath}_2$ ($\bar{\imath}_1 \wedge \bar{\imath}_2 \neq O$), se tendrá

$$(106) \qquad \vec{V} = \frac{1}{(\bar{\imath}_1 \wedge \bar{\imath}_2)^2} \left\{ \bar{\imath}_1 [\vec{V} \wedge \bar{\imath}_2 \times (\bar{\imath}_1 \wedge \bar{\imath}_2)] - \bar{\imath}_2 [\vec{V} \wedge \bar{\imath}_1 \times (\bar{\imath}_1 \wedge \bar{\imath}_2)] \right\}$$

§ 4.—Ve sores cuadrante.

59. División de vectores.—El conjunto de dos vectores que forman un ángulo cualquiera, tiene por valor el cuociente del vector final entre el vector inicial. (fig. 18)

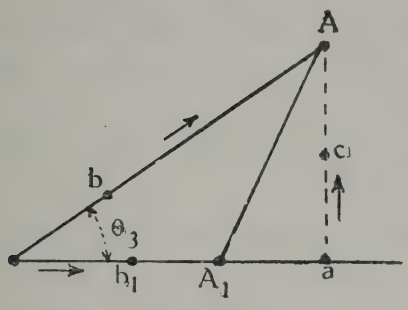


Fig. 18

En efecto, sean los dos vectores $\overrightarrow{V_1}$ y $\overrightarrow{V}$ que forman el ángulo $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V}) = \theta_3$. Construyamos, a partir del punto O, las puntos $A_1 = O + \overrightarrow{V_1}$ y $A = O + \overrightarrow{V}$ determinando los segmentos orientados $\overline{OA_1}$ y $\overline{OA}$ que individualizan a los vectores dados, determinemos del mismo modo los segmenios orientados que individualizan a los versores $\overrightarrow{\chi}$; $\vec{\imath}_1$; $\vec{\imath}_2$ estos son $\overline{ob}$; $\overline{ob_1}$; $\overline{ac}$.

Como los segmenios orientados considerados determinan un plano se podrá fijar la dirección plana por la normal que indica la dirección del vector; su módulo estará dado por el cuociente de los módulos $\frac{V}{V_1}$ y el sentido estará fijado, según el convenio admitido, colocándose según la normal al plano.

En tal virtud, la dirección plana quedará definida por

$$\frac{\overrightarrow{V}}{\overrightarrow{V_1}} = \frac{\overrightarrow{\chi}}{\vec{\imath}_1} \cdot \frac{V}{V_1} = I.m \tag{107}$$

El vector paralelo al $\overrightarrow{V_1}$ quedará definido por $a - O = m_1 \overrightarrow{V_1}$.

Ahora como $\overrightarrow{V} = m_1 \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$

El cuociente $$\frac{\vec{V}}{\vec{V}_1} = \frac{m_1 \vec{V}_1 + \vec{V}_2}{\vec{V}_1} = m_1 + \frac{\vec{V}_2}{\vec{V}_1}$$

Teniendo presente que

$$\frac{\vec{\chi}}{\vec{\imath}_1} \frac{V}{V_1} = m_1 + \frac{\vec{\imath}_2}{\vec{\imath}_1} \frac{V_2}{V_1}$$

las relaciones

$$\frac{\vec{\chi}}{\vec{\imath}_1} = I \qquad \frac{\vec{\imath}_2}{\vec{\imath}_1} = I_3$$

entonces se tendrá

(108) $$I\, m = m_1 + I_3\, m_3$$

o bien

$$I = \frac{m_1}{m} + I_3 \frac{m_3}{m}$$

pero

$$\frac{m_1}{m} = \cos \theta_3 \qquad \frac{m_3}{m} = \operatorname{sen} \theta_3$$

luego

$$I = \cos \theta_3 + I_3 \operatorname{sen} \theta_3 \tag{109}$$

Lo que nos permite observar que I es un versor de naturaleza angular cuya unidad es el cuadrante $\frac{\pi}{2}$. Para una magnitud angular cualquiera z menor que un cuadrante, se deduce la proporción $\frac{z}{2} = \frac{\theta_3}{\pi}$ de donde $z = \frac{2\theta_3}{\pi}$. De manera que la naturaleza angular del versor quedará simbolizada por $I = I^{\frac{2\theta_3}{\pi}}$ entonces

$$I_3^{\frac{2\theta_3}{\pi}} = \cos \theta_3 + I_3 \operatorname{sen} \theta_3 \tag{I10}$$

que da una estructura general para los *versores cuadrante* I_3 define el eje y el exponente determina la magnitud angular

$$\frac{\vec{V}}{\vec{V}_1} = I_3^{\frac{2\theta_3}{\pi}} m = m \cos \theta_3 + I_3 m \operatorname{sen} \theta_3 \tag{111}$$

en la cual

$m \cos \theta_3 = E_3$ es un escalar

$I_3 m \operatorname{sen} \theta_3 = \vec{W}_3$ es un vector

La expresión $C_3 = E_3 + \overline{W}_2$ define el *cuaternio de Hamilton* pue corresponde al plano $x_1\, x_2$.

En genera,l para cada uno de los tres planos determinados por una terna ortogonal, se tiene

$$C_u = E_u + \overline{W}_u \qquad u = 1,2,3 \tag{112}$$

Sumando tendremos

$$C = E + \overline{W} \tag{113}$$

es la forma general del *cuaternio de Hamilton*, en la cual el *vector de Hamilton* está expresado por

$$\overline{W} = \sum_{1}^{3} I_i\, x_i \tag{114}$$

Los versores I_u por $u = 1,2,3$ son los versores cuadrante.

De manera pues, que en una terna ortogonal debemos distinguir dos clases de versores: 1°. los *versores lineales* i_u y 2°. los versores cuadrante I_u.

60. Relación entre los versores lineales con los versores cuadrante y propiedades de estos últimos.—Sean i_u por $u = 1,2,3$ los versores lineales fundamentales que definen una terna ortogonal y I_u por $u = 1,2,3$ los versores cuadrante de la misma terna.

$$\frac{\bar{\imath}_3}{\bar{\imath}_2} = I_1 \qquad \frac{\bar{\imath}_1}{\bar{\imath}_3} = I_2 \qquad \frac{\bar{\imath}_2}{\bar{\imath}_1} = I_3$$

(115)

$$\frac{\bar{\imath}_2}{\bar{\imath}_3} = -I_1 \qquad \frac{\bar{\imath}_3}{\bar{\imath}_1} = -I_2 \qquad \frac{\bar{\imath}_1}{\bar{\imath}_2} = -I_3$$

de las anteriores relaciones se deduce inmediatamente en forma abreviada

(116) $$I_u\, I_v = \pm I_w$$

siendo $u \neq v \neq w = 1,2,3$ y explícitamente se tiene

(117) $$I_1^2 = -1 \qquad I_2^2 = -1 \qquad I_3^2 = -1$$

o simplemente $$I_u^2 = -1$$

$$I_1.I_2 = I_3 \qquad I_1.I_3 = I_2 \qquad I_2.I_3 = I_1$$

(118) y también

$$I_1.I_2 = -I_3 \qquad I_1.I_3 = -I_2 \qquad I_2.I_3 = -I_3$$

§ 5.—Vectores aplicados.—Orientación relativa de dos vectores.—Momento con respecto a un punto.—Momento con respecto a un eje.

61. Asociación de un vector con un punto.—Concepto de Vector Aplicado.—Anteriormente hemos hecho una observación respetoa la denominación de vector aplicado considerando que en realidad es el mismo segmento orientado.

Ahora si imaginamos la asociación de un vector $\overrightarrow{V_1}$ con un punto A_1 obtiénese así un nuevo ente variable al variar el punto que se ha imaginado asociado al vector y que se simboliza por $(A_1, \overrightarrow{V_1}) = (A_1, B_1 - A_1)$.

El concepto de vector aplicado deja al ente el carácter de vector puro mientras él sea una función binaria de un punto y un vector, entiénse solamente como un sustantivo y no como una abreviación de vector que es aplicado.

El vector aplicado queda individualizado por un segmento orientado $\overline{A_1 B_1}$ que se localiza según una línea de acción que pasa por el punto A_1 que es el origen del segmento orientado que individualiza el punto de aplicación del vector.

Dos vectores aplicados son *iguales* cuando tienen

$$A_1 = A_2 \qquad \overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_2}$$

Un sistema de vectores aplicados es *concurrente* si tienen el mismo punto de aplicación

$$(A_1, \overrightarrow{V_1}) \qquad (A_1, \overrightarrow{V_2})$$

Un sistema de vectores aplicados es *paralelo* cuando todos o el mismo vector aplicado tienen la misma dirección tales como los

$$(A_1, \overrightarrow{V_1}) \quad y \quad (A_2, m\overrightarrow{V_1})$$

62. Orientación relativa de dos rectas orientadas que se cruzan en el espacio.—Cuando se consideran dos rectas orientadas (flg. 19) que se cruzan, tales como las r y r_1 para determinar la orientación relativa de una con respecto a la otra, se elige sobre una de ellas por ejemplo la r_1 una serie de puntos A_u por $u = 1,2,3,\cdots n$ y se hacen pasar los planos que determinan cada uno de los puntos A_u y la recta r tales como las P_u $u = 1,2,3,\cdots n$. El sentido de la recta r_1 subordina un sentido al conjunto de planos.

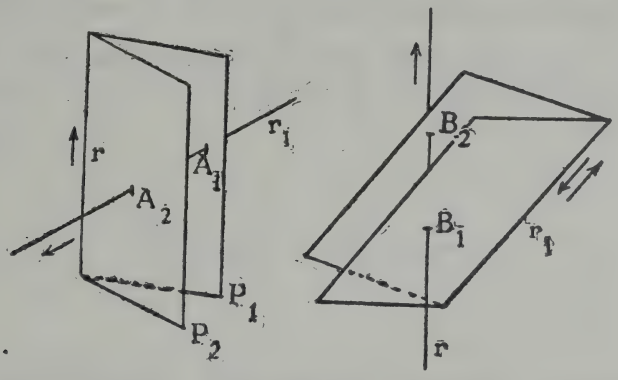


Fig. 19

De manera que para un observador colocado según la recta orientada r corresponderá un sentido de rotación del conjunto que podrá ser sinestrorsum o destrorsum. Ahora si consideramos lo contrario eligiendo sobre r uná serie de puntos B_u $u = 1,2,3,\cdots n$ haciendo pasar los planos por dichos puntos y la recta r_1 tales como los Q_u por $u = 1,2,3,\cdots n$. El sentido de la recta r subordina un sentido al conjunto de planos que para un observador colocado según la recta orientada r_1 corresponderá un sentido en la rotación del conjunto que podrá ser sinestrorsum o destrorsum.

Ahora será a la vez sinestrorsum o destrorsum como facilmente se puede reconocer atendiendo al sentido de las dos rotaciones unificadas a la vez según las dos rectas orientadas r y r_1 según sea el sentido de cada una de ellas con relación al de la otra luego:

Dos rectas orientadas r y r_1 que son sinestrorsum o destrorsum según sea sinestrorsum o destrorsum al sentido de la rotación determinada de cada una de ellas alrededor de la otra.

La orientación relativa de dos rectas orientadas en el espacio sinestrorsum o destrorsum se puede hacer extensivo a dos segmentos orienlados no coplanares tales como los $\overline{A\,B}$, $\overline{A_1\,B_1}$ y tambien a una rectá orientada *r* y un segmento orientado $\overline{A\,B}$ que se crucen.

63. **Momento con respecto a un punto de un vector aplicdo.**—Consideremos el vector aplicado $(A_1, \overline{V}_1)$: sea O_1 un punto cualquiera que con el punto A_1 definen el vector $A_1 - O_1$ al producto vectorial (fig. 20).

$$\overline{M}_1 = (A_1 - O_1) \wedge \overline{V}_1 \tag{119}$$

a este ente se le denomina *momento del vector aplicado* $(A_1, \overline{V}_1)$ con respecto al punto O_1, tambien se llama *momento polar.*

Obsérvese que $\overline{M}_1$ es un vector que es normal al plano definido por el vector aplicado $(A_1, \overline{V}_1)$ y el punto O_1. Además se puede individualizar el vector $\overline{M}_1$ por la construcción del punto $C_1 = O_1 + \overline{M}_1$ que determina el vector aplicado $(O_1, \overline{M}_1)$

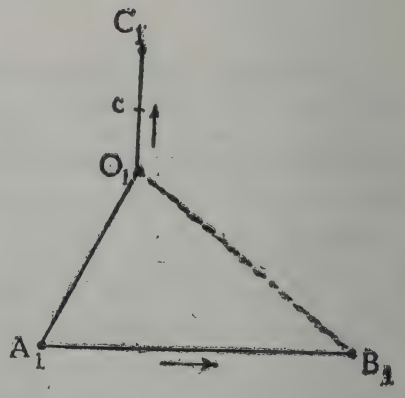


Fig. 20

Para otro vector aplicado $(A_2, \overline{V}_2)$ el momento con respecto al mismo punto O_1 será

(120) $$\overrightarrow{M_2} = (A_2 - O_1) \wedge \overrightarrow{V_2}$$

Ahora como

$$(A_2 - O_1) = (A_1 - O_1) + (A_2 - A_1)$$

(121) entonces

$$\overrightarrow{M_2} = (A_1 - O_1) \wedge \overrightarrow{V_2} + (A_2 - A_1) \wedge \overrightarrow{V_2}$$

pero sabemos que

$$(A_2 - A_1) \wedge \overrightarrow{V_2} = O$$

lo que reduce la anterior a la

(122) $$\overrightarrow{M_2} = (A_1 - O_1) \wedge \overrightarrow{V_2}$$

cuando $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_1}$ se tendra $\overrightarrow{M_2} = \overrightarrow{M_1}$

lo que nos dice que el momento de un vector aplicado con respecto a un punto se conserva el mismo cuando los vectores son iguales.

Para representar geométricamente lo anteriormente expresado individualizaremos el vector por el segmento orientado $\overline{A_1 B_1}$ siendo A_1 el punto que individualiza el punto de aplicación, que es el origen del segmentó orientado.

Por la definición de producto vectorial se tiene

$$(123) \qquad \vec{M}_1 = \vec{\iota}_n \, V_1 \operatorname{mod} (A_1 - O_1) \operatorname{sen} [(A_1 - O_1), \vec{V}_1]$$

o bien

$$\operatorname{mod} (A_1 - O_1) = r$$

$$(124) \qquad \vec{M}_1 = \vec{\iota}_n \, V_1 \, r \operatorname{sen} (r, \vec{V}_1)$$

siendo

$$r \operatorname{sen} (r, \vec{V}_1) = 6$$

y

$$\vec{M}_1 = \vec{\iota}_n M_1$$

el módulo del momento será

$$(125) \qquad M_1 = V.6$$

es decir que el módulo del vector momento esta expresado por el producto del módulo del vector por la distancia del punto O_1 a la línea de acción del segmento orientado que individualiza al vector.

Casos de momento nulo.—Quedan incluídos en los casos en que el producto veciorial sea nulo.

64. Expresión cartesiana del momento de un vector aplicado con respecto a un punto.—Refiriendo el vector aplicado $(A_1, \vec{V}_1)$ y el punto O_1 a una terna cartesiana ortogonal sean $\vec{\iota}_u$ por $u = 1,2,3$ los versores fundamentales de la terna, sean X_n por $u = 1,2,3$ las

componentes; x_u por $u = 1,2,3$ las coordenadas del punto A_u y a_u por $u = 1,2,3$ las coordenadas del punto O_1, el producto vectorial que define el momento.

$$\overrightarrow{M_1} = (A_1 - O_1) \wedge \overrightarrow{V_1} \tag{126}$$

Como se sabe podrá ser expresado por el determinante

$$\overrightarrow{M_1} = \begin{vmatrix} \bar{\imath}_1 & \bar{\imath}_2 & \bar{\imath}_3 \\ x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\imath}_u \\ x_u - a_u \\ X_u \end{vmatrix} \begin{matrix} u = 3 \\ \\ \\ \\ u = 1 \end{matrix} \tag{127}$$

La expresión del módulo del momento se obtiene multiplicando escalarmente la (127) por el versor $\bar{\imath}_u$ determinando los cosenos directores del vector momento $\cos \alpha_u$ por $u = 1,2,3$ dicho módulo estará dado por el determinante

$$M_1 = \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha_u \\ x_u - a_u \\ X_u \end{vmatrix} \begin{matrix} u = 3 \\ \\ \\ \\ u = 1 \end{matrix} \tag{128}$$

Cuando el punto O_1 coincide con el origen de los ejes los (127) y (128) se reducen a las

$$(129)\qquad \vec{M}_1 = \begin{vmatrix} \bar{\imath}_1 & \bar{\imath}_2 & \bar{\imath}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\imath}_u \\ x_u \\ X_u \end{vmatrix} \begin{matrix} u = 3 \\ \\ \\ u = 1 \end{matrix}$$

el módulo

$$(130)\qquad \vec{M}_1 = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha_u \\ x_u \\ X_u \end{vmatrix} \begin{matrix} u = 3 \\ \\ \\ u = 1 \end{matrix}$$

65. Momento de un vector aplicado con respecto a un eje.—Consideremos un vector aplicado $(A_1, \vec{V}_1)$ y un versor $\bar{\imath}_e$ que corresponde a la dirección que define el eje orientado (fig. 21).

Al producto escalar

$$(131)\qquad M_e = \vec{\imath}_e \times \vec{M}_1$$

se le denomina momento del vector aplicado $(A_1, \vec{V}_1)$ con con respecto al eje y también se llama *momento axial.*

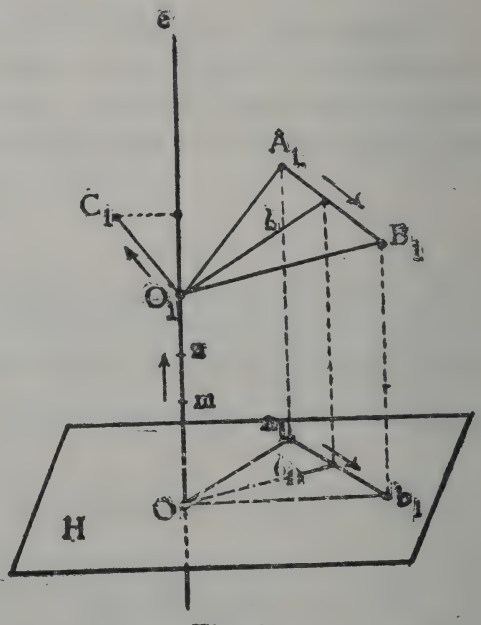


Fig. 21

Recordando que $\overrightarrow{M_1} = (A_1 - O_1) \wedge \overrightarrow{V_1}$ si ahora O_1 es un punto cualquiera que corresponde a la dirección que define el eje orientado e la expresión (131) podrá ser escrita así

$$M_e = \overrightarrow{\imath_e} \times (A_1 - O_1) \wedge \overrightarrow{V_1} \tag{132}$$

que determina un *producto mixto* que como sabemos es un escalar.

Para representar geométricamente lo expresado antes individualizaremos el vector por el segmento orientado $\overline{A_1 B_1}$ siendo A_1 el punto que individualiza el punto de aplicación y también individualizaremos el versor por el segmento orientado $\overline{m n}$, asi como el eje orientado e.

Obsérvese en la (131) que

$$M_e = \overrightarrow{\imath_e} \times \overrightarrow{\imath_n} M_1 \tag{133}$$

como

$$\overrightarrow{\imath_e} \times \overrightarrow{\imath_n} = \cos (\overrightarrow{\imath_e}, \overrightarrow{\imath_n})$$

se deduce que

$$M_e = M_1 \cos (\overrightarrow{\imath_e}, \overrightarrow{\imath_n})$$

nos dice que el momento de un vector con respecto a un eje está expresado por el valor algebraico de la componente según la dirección del eje orientado e del momento con respecto a un punto cualquiera del eje orientado e.

El valor absoluto del momento del vector con respecto al eje orien-

tado e es $V_1\,6\cos(\vec{\iota_e}, \vec{\iota_n})$ pero como las ternas que definen los ∞^3 segmentos orientados equipolentes trazados por los ∞^3 puntos del espacio que individualizan a los vectores $\vec{\iota_e}$, $A_1 - O_1$ y $(A_1 \vec{V_1})$ pueden estar orientadas sinestrorsum o destrorsum según que $(A_1, \vec{V_1})$ sea sinestrorsum o destrorsum respecto a la dirección orientada del eje, evidentemente que esto dará lugar a que dicho momento pueda ser positivo o negativo.

Obsérvese además que el valor absoluto de M_e es igual al volúmen de los ∞^3 paralelepípedos determinados por los módulos (longitudes) de los segmentos orientados que individualizan a los vectores $\vec{\iota_e}$, $A_1 - O_1$ y $(A_1, \vec{V_1})$.

En general se tendrá

(134) $$M_e = \pm V_1\,6\cos(\vec{\iota_e}, \vec{\iota_n})$$

pero $V_1\,6$ es igual al doble del área del triángulo determinado por V_1 y 6 asi se tendrá

(135) $$V_1 6 = 2\,A_1O_1B_1$$

luego

(136) $$M_e = \pm 2\,A_1O_1B_1\cos(\vec{\iota_e}, \vec{\iota_n})$$

es evidente que

$$(137) \qquad A_1O_1B_1 \cos(\vec{\iota}_e, \vec{\iota}_u) = a_1ob_1 = \frac{1}{2} V_o \delta_o$$

siendo V_o y δ_o los valores algebraicos del segmento orientado que indivldualiza a la componente del vector aplicado $(A_1, \vec{V}_1)$ y la distancia δ según la dirección plana perpendicular al versor $\vec{\iota}_e$ o bien al eje orientado e, por lo tanto se deduce que

$$M_e = \pm 2\, a_1ob_1 = \pm V_o\delta_o$$

66.—Expresión cartesiana del momento de un vector aplicado con respecto a un eje.—Se deduce facilmente que

$$(138) \quad M_e = \vec{\iota}_e \times \vec{M}_1 = \vec{\iota}_e \times \begin{vmatrix} \bar{\iota}_1 & \bar{\iota}_2 & \bar{\iota}_3 \\ x_1 - a & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\iota}_u \\ x_u - a_u \\ X_u \end{vmatrix}_{u=1}^{u=3}$$

o bien

$$(139) \qquad M_e = \begin{vmatrix} \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \\ x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\gamma_u \\ x_u - a_u \\ X_u \end{vmatrix}_{u=1}^{u=3}$$

67.—**Resultante general y momento resultante de un sistema de vectores aplicados,**—Sean un sistema de vectores aplicados $(A_u, \vec{V}_u)$

por $u = 1,2,3, \cdots n$ los puntos de aplicación A_u por $u = 1,2,3, \cdots n$ pueden ser distintos o coincidentes y el punto genérico o polo O.

Representemos por $(O, \overrightarrow{M_u})$ por $u = 1,2,3, \cdots n$ los vectores aplicados que definen los momentos. Es evidente en virtud de nº. 22 que

$$(140) \qquad \overrightarrow{M} = \sum_{1\,u}^{n} \overrightarrow{M_u} \qquad \text{siendo} \qquad \overrightarrow{M_u} = (A_u - O) \wedge \overrightarrow{V_u}$$

$$u = 1,2,3, \cdots n$$

es decir que el *momento resultantc del sistema de vectores respecto del punto O es el vector* $\overrightarrow{M}$ *resultante de los momentos de cada uno de los vectores del sistema.*

Al punto O se le llama el *centro de reducción* del sistema de vectores.

Cuando todos los vectores aplicados $(A_u, \overrightarrow{V_u})$ por $u = 1,2,3 \cdots n$ tienen la particularidad que $A_u = A$ son *concurrentes* entonces.

$$(141) \quad \overrightarrow{M} = \sum_{1\,u}^{n} (A - O) \wedge \overrightarrow{V_u} = (A - O) \wedge \sum_{1\,u}^{n} \overrightarrow{V_u} = (A - O) \wedge \overrightarrow{V}$$

El momento resultante coincide siempre con el momento del resultante, es el teorema clásico de Piere Varignon.

Por la definición de vector.

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{\iota_n M} \qquad \overrightarrow{M_u} = \overrightarrow{\iota_u M_u}$$

entonces la (140) se podrá escribir así

(142) $$M = \sum_{1\,u}^{n} \vec{\imath}_n \times \vec{\imath}_u M_u$$

y como $\vec{\imath}_n \times \vec{\imath}_u = \cos(\vec{\imath}_n; \vec{\imath}_u)$

(143) $$M = \sum_{1\,u}^{n} M_u \cdot \cos(\vec{\imath}_n, \vec{\imath}_u)$$

pero

(144) $$M_u = V_u r_u \operatorname{sen}(\vec{r}_u, \vec{V}_u)$$

además

$$r_u \operatorname{sen}(\vec{r}_u, \vec{V}_u) = \delta_u$$

$$M_u = V_u \delta_u \qquad u = 1,2,3 \cdots n$$

(145) $$M = \sum_{1\,u}^{n} V_u \delta_u \cos(\vec{\imath}_n, \vec{\imath}_u)$$

Cuando todos los vectores aplicados $(A_u, \vec{V}_u)$ son concurrentes serán $(A_1 \vec{V}_u)$ y $r_u = r$

$$r \operatorname{sen}(\vec{r}, \vec{V}_u) = \delta_u^*$$

entonces

(146) $$M = \sum_{1\,u}^{n} V_u \, \delta_u^* \cos(\vec{\iota}_u, \vec{\iota}_u)$$

Cuando todos los vectores aplicados están en un mismo plano $\vec{\iota}_u = \vec{\iota}_n \qquad \cos(\vec{\iota}_n, \vec{\iota}_n) = \cos 0^\circ = 1$

(147) $$M = \sum_{1\,u}^{n} V_u \delta_u^*$$

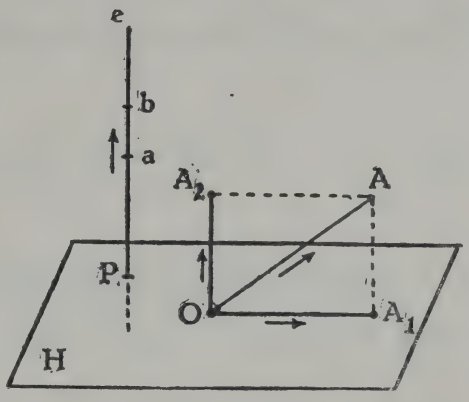
68. Si se trata ahora de un eje orientado e y el sistema de vectores $\vec{V}_u$ por $u = 1,2,3, \cdots n$ y $\vec{\iota}_e$ es el versor que puede quedar individualizado sobre el eje por el segmento orientado. $\overline{mn}$.

(148) $$M_e = \vec{\iota}_e \times \vec{M} = \sum_{1\,u}^{n} \vec{\iota}_e \times \vec{M}_u$$

nos dice: que el momento con respecto a un eje orientado e de un vector aplicado $(A, \vec{V})$ resultante de los vectores aplicados $(A_u, \vec{V}_u)$ componentes, es la componente del vector aplicado $(O, \vec{M})$ momento resultante según la misma dirección del eje orientado que es igual a la suma algebraica de las componentes de los vectores aplicados $(O, \vec{M}_u)$ momentos componentes con respecto al punto cualquiera O del eje orientado e y según la misma dirección del eje orientado.

El momento resultante de un sistema de vectores aplicados con respecto a un eje orientado e es igual a la suma algebraica de los momentos de las componentes con respecto al mismo eje orientado e,

Si imaginamos un vector aplicado $(O, \overrightarrow{V})$ (fig. 22) descompuesto en sus dos componentes $(O, \overrightarrow{V_1})$ y $O, \overrightarrow{V_2})$ normal y paralelo a un versor $\overrightarrow{\iota_e}$, el momento con respecto al eje orientado e del vector aplicado $(O, \overrightarrow{V_1})$ coincide con el momento resultante del sistema formado por los vectores aplicados $(O, \overrightarrow{V_1})$ y $(O, \overrightarrow{V_2})$



Lig. 22

En efecto el momento del vector aplicado $(O, \overrightarrow{V_2})$ es nulo (casos de momento nulo con respecto a un eje) entonces el momento del vector aplicado $(O, \overrightarrow{V})$ coincide con el momento de su componente normal $(O, \overrightarrow{V_1})$ es decir que $M_e = M_n$.

Considerando los segmentos orientados $\overline{OA}$ $\overline{OA_1}$ y $\overline{OA_2}$ que individualizan a los vectores aplicados concurrentes, podremos fácilmente observar lo anteriormente expresado dentro de esta individualización.

69. **Modo de variar el momento al variar el centro de reducción.**— Consideremos un vector aplicado $(A_1, \overrightarrow{V_1})$ y los centros de reducción (o polos) C_1 y C_2 los vectores aplicados momentos estarán simbolizados por $(C_1, \overrightarrow{M_1})$ y $(C_2, \overrightarrow{M_2})$ expresados por

$$(149) \qquad \overrightarrow{M_1} = (A_1 - C_1) \wedge \overrightarrow{V_1} \qquad \overrightarrow{M_2} = (A_1 - C_2) \wedge \overrightarrow{V_1}$$

pero $$(A_1 - C_2) = (A_1 - C_1) + (C_1 - C_2)$$

reemplazando en la segunda de las anteriores se tiene

$$\overrightarrow{M_2} = (A_1 - C_1) \wedge \overrightarrow{V_1} + (C_1 - C_2) \wedge \overrightarrow{V_1} \tag{150}$$

o bien por la (119) se puede escribir

$$\overrightarrow{M_2} = \overrightarrow{M_1} + (C_1 - C_2) \wedge \overrightarrow{V_1} \tag{151}$$

Haciendo extensivo lo anterior a un sistema de vectores aplicados tales como los $(A_u, \overrightarrow{V_u})$ análogamente se deduce.

$$\overrightarrow{M_{v+1}} = \overrightarrow{Mv} + (C_1 - C_2) \wedge \overrightarrow{V_v} \qquad v = 1,2,3, \cdots n \tag{152}$$

que sumadas geométricamente, teniendo presente que

$$\sum_{1}^{n} \overrightarrow{V_v} = \overrightarrow{V}$$

siendo $\overrightarrow{V}$ el vector resultante del sistema, entences se tendrá

$$\overrightarrow{M^*} = \overrightarrow{M} + (C_1 - C_2) \wedge \overrightarrow{V} \tag{153}$$

Nos dice: que el momento resultante del sistema respecto a C_2 es la suma del análogo momento respecto a C_1 y del momento respecto a C_2 del vector résultante $\overrightarrow{V}$ del sistema aplicado en C_1.

70. Expresión cartesiana de la variación del momento al variar el centro de reducción.—Sea una terna ortogonal definida por los versores fundamentales $\vec{\iota}_u$ por $u = 1,2,3$, las componentes del vector aplicado $(A, \overrightarrow{V})$ son X_u por $u = 1,2,3$. Las componentes de los vectores momento $\overrightarrow{M}$ y $\overrightarrow{M^*}$ son respectivamente M_u y M_u^* y están expresados por

$$M_u = \vec{\iota}_u \times \overrightarrow{M} \qquad M_u^* = \vec{\iota}_u \times \overrightarrow{M^*} \tag{144}$$

y las componentes del vector momento $(C_1 - C_2) \wedge \overrightarrow{V}$ son

$$\vec{\iota}_u \times (C_1 - C_2) \wedge \overrightarrow{V} = \mathfrak{M}_u \qquad u = 1,2,3 \tag{145}$$

es evidente que

$$M_u^* = M_u + \mathfrak{M}_u \qquad u = 1,2,3 \tag{146}$$

denominando x_u por $u = 1,2,3$ las coordenadas del punto genérico C_2 y a_u por $u = 1,2,3$ las coordenadas de C_1, de la anterior se deduce

$$\begin{aligned} M_1^* &= M_1 + (a_2 - x_2)\, X_3 - (a_3 - x_3)\, X_2 \\ M_2^* &= M_2 + (a_3 - x_3)\, X_1 - (a_1 - x_1)\, X_3 \\ M_3^* &= M_3 + (a_1 - x_1)\, X_2 - (a_2 - x_2)\, X_1 \end{aligned} \tag{147}$$

Cuando $a_u = 0$ por $u = 1,2,3,$. C_1 coincide con el origen de coordenadas y las (147) se reducen a las

$$M_1^* = M_1 - x_2 X_3 + x_3 X_2$$

(148) $$M_2^* = M_2 - x_3 X_1 + x_1 X_3$$

$$M_3^* = M_3 - x_1 X_2 + x_2 X_1$$

La expresión (146) nos conduce a observar

1°. Cuando el vector $\overrightarrow{V} = 0$ el momento

$$\overrightarrow{M^*} = \overrightarrow{M}$$

2°. Si el momento $\overrightarrow{M^*}$ coincide con el momento $\overrightarrow{M}$ se tendrá

$$(C_1 - C_2) \wedge \overrightarrow{V} = O$$

lo que indica, en general, que los vectores $(C_1 - C_2)$ y $\overrightarrow{V}$ son paralelos, o bien uno de ellos es nulo y en especial si $V = \overrightarrow{0}$.

Lo anterior nos permite observar que si el sistema tiene resultante $\overrightarrow{V}$ nulo, el *momento resultante es independiente del centro de reducción.*

Si el vector resultante no es nulo y si $\overrightarrow{M^*} = \overrightarrow{M}$ siendo $(C_1 - C_2) \wedge \overrightarrow{V} = 0$ la recta $C_1 C_2$ será paralela al vector $\overrightarrow{V}$.

71. Trinomio invariante.—Multiplícando escalarmente la ecuación

$$\overrightarrow{M^*} = \overrightarrow{M} + (C_1 - C_2) \wedge \overrightarrow{V} \tag{149}$$

por el resultante $\overrightarrow{V}$ se tendrá:

$$\overrightarrow{M^*} \times \overrightarrow{V} = \overrightarrow{M} \times \overrightarrow{V} + [(C_1 - C_2) \wedge \overrightarrow{V}] \times \overrightarrow{V} \tag{150}$$

Como sabemos que el producto vectorial define el vector $(C_1 - C_2) \wedge \overrightarrow{V}$ perpendicular a $\overrightarrow{V}$ se deduce que

$$[(C_1 - C_2) \wedge \overrightarrow{V}] \times \overrightarrow{V} = 0$$

luego

$$\overrightarrow{M^*} \times \overrightarrow{V} = \overrightarrow{M} \times \overrightarrow{V}$$

pero el producto escalar

$$\overrightarrow{M} \times \overrightarrow{V} = \sum_{1}^{3} {}_u M_u X_u \tag{151}$$

nos dice que el momento resultante por el vector resultante es independiente del centro de reducción, por tal razón al trinomio

$$T = \sum_{1}^{3} {}_u M_u X_u \tag{I52}$$

se le denomina el *trinomio invariante del sistema.*

En el caso que el resultante de un sistema no sea nula y tenga una dirección bien determinada, *la componente del momento resultante según la dirección orientada del resultante es independiente del centro de reducción.*

En efecto cualquiera que sea el centro de reducción C_1 se tiene por la (46) (deflnición de producto escalar) que

$$T = \overrightarrow{M} \times \overrightarrow{V} = M\,V\cos\left(\overrightarrow{V},\overrightarrow{M}\right) \tag{153}$$

o bien

$$M\cos\left(\overrightarrow{V},\overrightarrow{M}\right) = \frac{T}{V} \tag{154}$$

Obsérvese que según sea agudo u obtuso el ángulo que forma el resultante $\overrightarrow{V}$ con el momento $\overrightarrow{M}$ será $T > 0$ ó $T < 0$ Cuando el ángulo de $\overrightarrow{V}$ con $\overrightarrow{M}$ es recto siendo $\overrightarrow{V} \neq 0$ será $T = 0$ el momento resultante será siempre perpendicular al vector resultante o en particular nulo.

72. Eje central.—Sea un sistema de vectores aplicados de resultante no nulo, busquemos el lugar geométrico de los puntos C respecto a los cuales el momento resultante es paralelo al resultante $\overrightarrow{V}$ o en particular nulo.

Las ecuaciones geométricas

$$\overrightarrow{V} = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u X_u \qquad \text{como} \qquad \overrightarrow{M} = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u M_u$$

$$(155) \qquad \vec{M}^* = \vec{M} - \bar{\imath}_1 (x_2 X_3 - x_3 X_2) - \bar{\imath}_2 (x_3 X_1 - x_1 X_3) - \bar{\imath}_3 (x_1 X_2 - x_2 X_1)$$

Para que ambos vectores $\vec{V}$ y $\vec{M}^*$ sean paralelos, las componentes según los ejes orientados x_u deben de ser proporcionales, es decir

$$(156) \qquad \frac{M_1 - x_2 X_3 + x_3 X_2}{X_1} = \frac{M_2 - x_3 X_1 + x_1 X_3}{X_2} = \frac{M_3 - x_1 X_2 + x_2 X_1}{X_3}$$

En el caso particular que se elija el eje orientado x_3 paralelo al vector resultante $\vec{V}$ será

$$X_1 = O \qquad X_2 = O \qquad X_3 = V$$

las igualdades (156) se reducen a las

$$M_1 - x_2 V = M_2 + x_1 V = O$$

de las que se tiene

$$(157) \qquad x_1 = -\frac{M_2}{V} \qquad x_2 = \frac{M_1}{V}$$

que determinan el lugar geométrico buscado, en el espacio será una recta paralela al eje x_3 o sea al vector resultante $\overrightarrow{V}$.

Como la componente del momento resultante según la dirección orientada del vector resultante es independiente del centro de reducción, se observa que la longitud del momento resultante asume el valor mínimo cuando el centro de reducción está sobre el eje central.

La longitud mínima coincide con el valor absoluto (constante) de la componente del momento según la dirección del vector resultante y esta dada por $\frac{|T|}{V}$

§ 6.—Sistemas equivalentes de vectores aplicados.—Reducción de un sistema por otro de vectores aplicados.—Vectores paralelos.

73. Sistemas equivalentes de vectores aplicados.—Se denomina sistemas equivalentes de vectores aplicados.

$$(A_u, \overrightarrow{V_u}) \quad y \quad (B_v, \overrightarrow{W_v}) \quad \text{por} \quad \begin{matrix} u = 1,2,3 \cdots n \\ v = 1,2,3 \cdots n' \end{matrix}$$

a los sistemas que tienen igual resultante e igual momento resultante respecto a un punto dado que puede ser cualquiera de los puntos que se elija en el espacio.

En efecto:

$$\overline{\overline{V}} = \sum_{1\,u}^{n} \overline{\overline{V_u}} \qquad \overline{\overline{W}} = \sum_{1\,v}^{n'} \overline{\overline{W_v}}$$

$$\overline{\overline{M}} = \sum_{1\,u}^{n} \overline{\overline{M_u}} \qquad \overline{\overline{N}} = \sum_{1\,v}^{n'} \overline{\overline{N_u}}$$

la condición formal de equivalencia es

$$\overline{\overline{W}} = \overline{\overline{V}} \qquad \overline{\overline{N}} = \overline{\overline{M}}$$

74. Expresión cartesiana de la equivalencia de los sistemas de vectores aplicados.—Si consideramos los sistemas de vectores aplicados referidos a una terna cartesiana $Ox_1x_2x_3$ las componentes de los vectores según los ejes orientados cartesianos serán X_u; Y_u por $u = 1,2,3$, enntonces las condiciones de equivalencia quedarán expresadas por

$$X_u = Y_u \qquad M_u = N_u \qquad \text{por } u = 1,2,3$$

De la definición de equivalencia se deduce que un sistema de vectores concurrentes constituye un sistema equivalente a su resultante.

Dos vectores aplicados definidos por los ∞^3 segmentos orientados equipolentes que tienen distinto origen considerados dichos segmentos orientados que individualizan a los dos vectores sobre una misma línea son equivalentes y los entes que corresponden a los ∞^3 segmentos orientados equipolentes, es decir, los dos vectores también serán equivalentes.

De la propia definición de equivalencia se deduce también que dos sistemas de vectores equivalentes a un tercer sistema serán equivalentes entre sí.

Un sistema de vectores aplicados equivalente a un solo vector aplicado siempre y sólo cuando se refiere al centro de reducción

respecto al cual el momento es nulo, esto es (suponiendo que $V \neq 0$) siempre y sólo cuando se anula el momento mínimo o lo que es lo mismo el *trinomio invariante* T. Cuando tal condición se verifica, el sistema dado es equivalente al vector único $\overline{V}$ aplicado en un punto cualquiera del eje central (entiéndese que está individualizado por el segmento orientado considerado sobre el eje central que es su línea de acción).

Cuando $\overline{V} = 0$ las (153) se reducen a la $\overline{M^*} = \overline{M}$ es decir, que el momento resultante es independiente del centro de reducción y si $\overline{M} \neq 0$ el sistema no es ya equipolente a un solo vector y si $\overline{M} = 0$ el sistema equivale a un vector nulo entonces se dice que es equivalente a cero o bien que está en *equilibrio,* en este último sistema será nulo el vector resultante y el momento resultante respecto a un punto o también respecto a un eje orientado cualquiera. Como caso especial se presenta el sistema formado por dos vectores aplicados iguales y directamenie opuestos, éstos forman un *sistema en equilibrio,* es decir que se pueden agregar o suprimir en los sistemas donde sea necesario considerarlos.

Un sistema de vectores aplicados en equilibrio debe tener nulo el momento resultante respecto de una recta cualquiera.

Conviene observar que en dos sistemas equivalentes uno de ellos se obtiene del otro agregando los vectores que forman un sistema en equilibrio, puesto que no alteran el vector resultante ni el momento resultante.

75. Operaciones elementales.—Cuando se tiene un sistema de vectores aplicados se denominan operaciones elementales:

1°. La composición o la descomposición de los vectores aplicados en un mismo punto.

2°. El agregar o suprimir dos vectores iguales y directamente opuestos, puesto que el vector resultante y el momento resultante respecto a cualquier punto del espacio es cero, forman un *sistema equivalente a cero* o bien se dice que están dichos *vectores en equilibrio* o que constituyen un *sistema en equilibrio.*

3°. El transportar un vector aplicado, (según las líneas de acción de los ∞^3 segmentos orientados equipolentes que lo definen). Esta operación consiste en individualizar primeramente el vector

aplicado por el segmento orientado al cual corresponde el punto asociado A tal como el $\overline{AB}$ tomando después como orígen el punto A_1 en la misma línea de acción agregar dos segmentos orientados iguales y directamente opuestos e iguales en longitud al $\overline{AB}$ tales como los $\overline{A_1B_1}$ y $-\overline{A_1B_2}$ entoces $\overline{AB}$ y $-\overline{A_1B_2}$ se pueden suprimir y el sistema quedara reducido al segmento orientado $\overline{A_1B_1}$ que no es otra cosa que el $\overline{AB}$ transportado sobre su misma línea de acción r. El ente geométrico abstracto que se puede hacer corresponder a los ∞^3 segmentos orientados equipolentes al $\overline{A_1B_1}$ define el vector transportado.

76. Sustitución o reductibilidad de un sistema por otro equipolente de vectores aplicados.—Un sistema (Σ) es sustituible o reductible a cualquier otro sistema equivalente (Σ').

Designemos por (Σ) y (Σ') los sistemas formados por los vectores aplicados $(A_u, \overline{V}_u)$ y $(B_v, \overline{W}_v)$ siendo los vectores resultantes $\overline{V}$ y $\overline{W}$ y los momentos resultantes $\overline{M}$ y $\overline{N}$ con relación a un punto O. Se dice que estos dos sistemas son equivalentes cuando pueden sustituirse el uno por el otro sin que varíe el estado del sistema.

Condición necesaria de equivalencia.—Consideremos un sistema auxiliar $(-\Sigma)$ formado por todos los vectores del sistema (Σ) pero orientados en sentido contrario, este nuevo sistema tiene por resultante y por momento resultante respecto de O los vectores $-\overline{V}$ y $-\overline{M}$. Entonces los sistemas $(-\Sigma)$ y (Σ) se equilibran y también se equilibran $(-\Sigma)$ y (Σ') formando un sistema equivalente a cero.

El vector resultante de todos los vectores del sistema formado por $(-\Sigma)$ y (Σ') está expresado por estar en equilibrio.

$$\overline{W} - \overline{V} = 0 \qquad \overline{N} - \overline{M} = 0$$

luego se deduce que

$$\overline{W} = \overline{V} \qquad \overline{N} = \overline{M}$$

Condición de suficiencia.—Siendo como hemos observado anteriormente.

$$\overline{W} = \overline{V} \qquad \text{y} \qquad \overline{N} = \overline{M}$$

el sistema formado por los sistemas $(-\Sigma)$ y (Σ) está en equilibrio y puede por lo tanto reducirse a cero por medio de las operaciones elementales (75).

Veamos pues como se puede pasar del sistema (Σ') al (Σ) por medio de las operaciones elementales. En efecto considerando el sistema (Σ') solamente, podemos añadir los dos sistemas (Σ) y $(-\Sigma)$, por las operaciones elementales puede reducirse a cero el conjunto de (Σ') y $(-\Sigma)$ quedándonos solamente el sistema (Σ). (Se pasa pues del sistema (Σ) al (Σ') por las operaciones elementales).

Queda pues probada la equivalencia de los dos sistemas (Σ) y (Σ') por las condiciones necesaria y suficiente.

$$\overline{W'} = \overline{V'} \qquad \overline{N'} = \overline{M'}$$

o simplemente

$$W = V \qquad N = M$$

77. Reducir un sistema de vectores aplicados a tres vectores.—Sean un sistema de vectores aplicados $(A_u, \overline{V_u})$ (fig. 23) por $u = 1,2,3,\cdots n$ sean O_u por $u = 1,2,3$ tres puntos elegidos en dicho sistema que no estén en línea recta. Los segmentos orientados que individualizan a los vectores aplicados son $\overline{A_u B_u}$ por $u = 1,2,3\cdots n$. Representaremos a uno de ellos tal como el $\overline{A_1 B_1}$, unamos el origen A_1 con los puntos O_u y descompongamos el segmento orienta-

do $\overline{A_1B_1}$ seguu las tres direcciones; transportando el orígen de los segmentos componentes a los puntos O_u obteniendo $\overline{O_u b_u}$ por $u = 1,2,3$. Asi procederemos con los demas segmentos orientados $\overline{A_2B_2}$ $\overline{A_3B_3}$ $\cdots$ $\overline{A_n B_n}$. Componiendo los sistemas de segmentos orien-

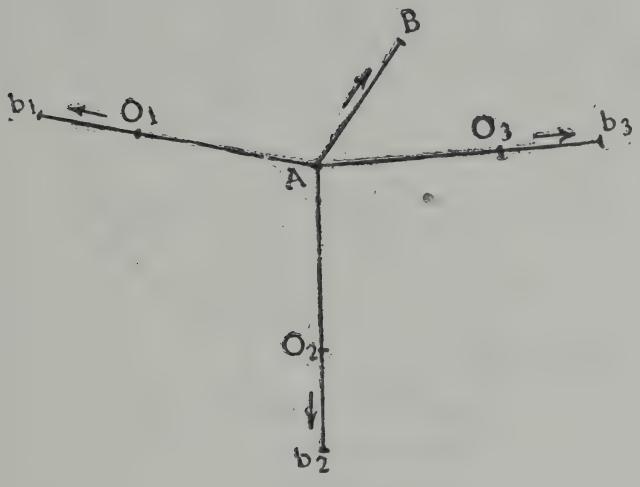


Fig. 23

tados concurrentes en los puntos O_u se obtendran los tres segmentos orientados resultantes. Los entes geométricos abstractos que corresponden a cada una de las tres clases de los ∞^3 segmentos orientados resultantes equipolentes, definen los vectores aplicados $(O_u, \overrightarrow{R_u})$ por $u = 1,2,3$, a que queda reducido el sistema.

78. Reducción de un sistema de vectores aplicados a dos vectores.—En un sistema de vectores aplicados $(A_u, \overrightarrow{V_u})$ (fig. 24) podemos efectuar la reducción a tres aplicados en los tres puntos O_u, como se ha verificado en el caso anterior. Ahora si consideramos los segmentos orieutados $\overline{A_1 B_1}$ que individualiza uno de los vectores aplicados por O_1 y $\overline{O_1 b_1}$ hagamos pasar un plano H_1 del mismo

modo por O_1 y O_3b_3 hagamos pasar un plano H_2 estos dos planos tienen por intersección la recta r. Descomponiendo los segmentos orientados $\overline{O_2b_2}$ según las direcciones O_2O_1 y O_2P y el $\overline{O_3b_3}$ según las direcciones O_3O_1 O_3P; transportando el origen a los puntos O_1 y P se obtendrán dos sistemas concurrentes que dan los dos segmentos orientados resultantes.

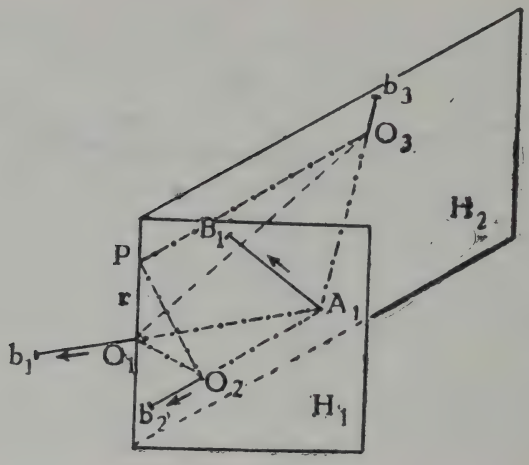


Fig. 24

Los entes geométricos abstractos que corresponden a estas dos clases de los ∞^3 segmentos orientados equipolentes definen los dos vectores aplicados $(O_1, \overline{R}_1)$ y $(P, \overline{R}_2)$ a que queda reducido el sistema dado.

1°. Un sistema de vectores para el cual el trinomio invariante no sea nulo

$$T = \overline{M} \times \overline{V}$$

será siempre equivalente a un vector y a un par.

2°. Un sistema de vectores para el cual el trinomio invariante es nulo equivale siempre a un solo vector, o bien a un par, o bien a cero, siendo ambos nulos.

Como aplicación de los anteriores, se tienen los casos:

1°. *Un sistema plano.*—Cuando el sistema está formado de vectores aplicados, individualizados por segmentos orientados, contenidos todos ellos en el mismo plano. Eligiendo un punto O cualquiera del plano como centro de reducción, el momento de cada uno de los segmentos orientados, con respecto a O, queda definido por un segmento orientado perpendicular al plano que individualiza el vector momento. Asimismo, quedará individualizado también el momento resultante, por un segmento orientado perpendicular al plano, como el trinomio invariante.

$$T = \overrightarrow{M} \times \overrightarrow{V} = M\,V\,\cos\,(\overrightarrow{M}, \overrightarrow{V})$$

en este caso

$$\cos\,(\overrightarrow{M}, \overrightarrow{V}) = \cos\,\frac{\pi}{2} = 0$$

entonces

$$T = 0$$

2°. *Un sistema paralelo.*—Cuando el sistema está constituído por vectores aplicados paralelos, el momento con respecto a un centro de reducción escogido será perpendicular a la dirección común de los vectores aplicados del sistema, entonces será

$$T = \overrightarrow{M} \times \overrightarrow{V} = 0$$

Sistema farmado por dos vectores aplicados en equilibrio.—Dos vectores aplicados concurrentes no pueden equilibrarse sino cuando son iguales y directamente opuestos.

Sistema formado por tres vectores aplicados en equilibrio.—Tres vectores aplicados estarán en equilibrio: 1°. Cuando están situa-

dos en un mismo plano respectivamente los segmentos orientados que los individualizan.—2°. Que las líneas de acción de dichos segmentos orientados se corten en un mismo punto.— 3°. Cada uno de ellos debe ser igual y directamente opuesto al resultante de los otros dos.— 4°. Cada uno de ellos debe ser proporcional al seno del ángulo que forman los otros dos.

En efecto, sean los vectores aplicados $(A_u, \overrightarrow{V_u})$ por $u = 1,2,3$ las líneas de acción r_u por $u = 1,2,3$ de los segmentos orientados $\overline{A_u B_u}$ por $u = 1,2,3$ que individualizan a cada uno de los vectores dados.

Podremos transportar cada uno de dichos segmentos orientados sobre su línea de acción de modo que los tres puntos A_u (origen de los segmentos orientados) no estén en la misma línea recta. El momento de los vectores aplicados $(A_1, \overrightarrow{V_1})$ y $(A_2, \overrightarrow{V_2})$ respecto a la recta $A_1 A_2$ (orientada en cualquiera de los dos sentidos) será nulo, y el momento resultante del sistema también debe anularse, y, por, lo tanto la línea de acción del segmento orientado $\overline{A_3 B_3}$ que individualiza al vector aplicado $(A_3, \overrightarrow{V_3})$ deberá encontrar a $A_1 A_2$ es decir, que cuando esto ocurre, el vector $(A_3, \overrightarrow{V_3})$ tendrá momento nulo respecto a la dirección $A_1 A_2$ y estará situado en la misma dirección plana definida por los tres punto A_u individualizada por el plano $A_1 A_2 A_3$. Se deduce que toda recta, que corta a las líneas de acción de los segmentos orientados qne individualizan a dos vectores, ha de encontrar a la tercera a una distancia finita o infinita lo cual exige que los tres vectores correspondan a una misma dirección plana.

Ahora, como las líneas de acción r_u que corresponden a los segmentos orientados $\overline{A_u B_u}$ que individualizan a los vectores aplicados, se encuentran en un mismo plano, podremos considerar que dos de ellos r_1 y r_2 se corten en el punto O, llevando el origen de los segmentos orientados $\overline{A_1 B_1}$ y $\overline{A_2 B_2}$ al punto O, obtendremos el segmento orientado resultante que individualiza al vector resultante de los vectores aplicados $(A_1, \overrightarrow{V_1})$ y $(A_2, \overrightarrow{V_2})$.

La línea de accion r_3 que corresponde al segmento orientado resultante debera coincidir con la segmento orientado $\overline{A_3 B_3}$ que individualiza al vector $(A_3, \overrightarrow{V_3})$, debiendo ser este vector igual y di-

rectamente opuesto al resultante de los otros dos para constituír así un *sistema en equilibrio.*

Los tres segmentos orientados $\overline{A_u B_u}$ por $u = 1,2,3$ formarán un triángulo, el cual gozará de todas las propiedades que le corresponden.

Como por cada punto del espacio de los ∞^3 se puede construír un triángulo análogo, el ente geométrico abstracto que corresponde a estos ∞^3 triángulos equipolentes define el sistema de los tres vectores en equilibrio, el cual goza de la propiedad.

$$\frac{\overrightarrow{V_1}}{\operatorname{sen}(\overrightarrow{V_2},\overrightarrow{V_3})} = \frac{\overrightarrow{V_2}}{\operatorname{sen}(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_3})} = \frac{\overrightarrow{V_3}}{\operatorname{sen}(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2})}$$

79. Par de vectores aplicados.—Se denomina par, un sistema formado de dos vectores aplicados opuestos (es decir paralelos y de sentido opuesto).

Los entes geométricos que corresponden a estas dos clases de los ∞^3 segmentos orientados equipolentes, respectivamente opuestos definen el par de vectores aplicados, simbolizados por

$$(A_1, \overrightarrow{V_1}) \quad \text{y} \quad (A_2, -\overrightarrow{V_1})$$

La distancia entre las respectivas líneas de acción de las dos clases de segmentos orientados opuestos, que individualizan a los vectores aplicados, se denomina *brazo de palanca.*

El sentido de un par está indicado por el sentido de la rotación concordante con el indicado por los vectores que definen el par, considerados en la misma dirección plana, alrededor de una dirección que se individualiza por un eje normal a dicha dirección plana.

80. Momento de un par de vectores aplicados.—El momento de un par de vectores aplicados se conserva el mismo respecto a cualquier punto del espacio (fig. 25).

Consideremos el par de vectores aplicados $(A_1, \overline{V}_1)$ y $(A_2, -\overline{V}_1)$ y el punto O del espacio. Individualicemos los vectores aplicados por los segmentos orientados $\overline{A_1 B_1}$ y $\overline{A_2 B_2}$, por el punto O tracemos un plano perpendicular al plano determinado por los segmentos orientados opuestos y que sea a la vez perpendicular a la dirección de dichos segmentos orientados $\overline{A_1 B_1}$ y $\overline{A_2 B_2}$; uniendo O con el orígen A_1 y con A_2 tendremos los segmentos orientados $\overline{OA_1}$ a $\overline{OA_2}$, uniendo O con a_1 y a_2 se tendrán los segmentos orientados $\overline{Oa_1}$ y $\overline{Oa_2}$ cuyos módulos determinan las distancias de O a los segmentos orientados que definen el par, evidentemente que

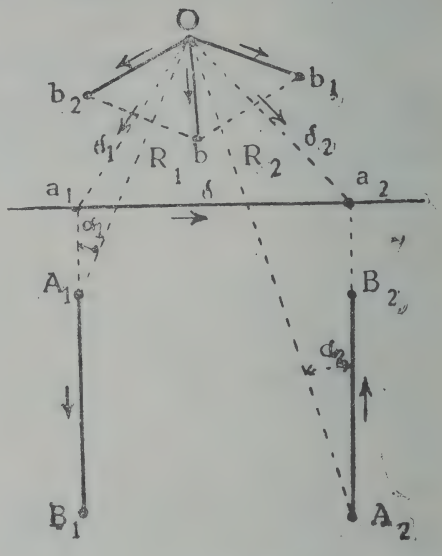


Fig. 25

$$R_1 \text{ sen } \alpha_1 = \delta_1 \qquad R_2 \text{ sen } \alpha_2 = \delta_2$$

Los momentos de los vectores aplicados individualizados por los segmentos orientados $\overline{OA_1}$ y OA_2 con respecto a O serán

$$\overline{M}_1 = (A_1 - O) \wedge \overline{V}_1 \qquad \overline{M}_2 = -(A_2 - O) \wedge \overline{V}_1$$

inmediatamente se demuestra que el vector momento resultante

(158) $$\overline{\overline{M}} = (A_1 - A_2) \wedge \overline{\overline{V_1}} = \overline{\overline{\iota_n}} V_1 \delta$$

De otra manera se tiene:

(159) $$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{M_1}} + \overline{\overline{M_2}} = \overline{\iota_1} M_1 - \overline{\iota_2} M_2$$

o bien

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\iota_1} R_1 V_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - \overline{\iota_2} R_2 V_1 \operatorname{sen} \alpha_2 = V_1 (\overline{\iota_1} \delta_1 - \overline{\iota_2} \delta_2)$$

multiplicando ambos miembros de esta igualdad por $\sqrt{-1}$ se tendrá

(160) $$\overline{\overline{M_p}} = V_1 (\overline{\Phi_1} \delta_1 - \overline{\Phi_2} \delta_2) = \overline{\Phi} V_1 \delta$$

siendo el módulo

(161) $$M = V_1 \delta$$

1°. Lo que nos permite observar que el momento del par es el mismo cualquiera que sea el punto del espacio respecto al cual se toma el momento.

2°. El momento del par permanecerá el mismo si V_1 crece y δ decrece o lo contrario siempre que varíen de manera que el producto se conserve constante, lo que permite verificar la transformación de un par en otro.

3°. El momento del par no altera para todos los pares que se encuentran en una misma dirección plana o bien que un par de

segmentos orientados que individualizan a los vectores pueda ser trasladado a un plano paralelo o bien en el mismo plano y hacer girar un ángulo cualquiera en su mismo plano.

4°.—Un par es pues un sistema de dos vectores cuyo resultante es cero y el vector momento resultante es constante para todos los puntos del espacio, perpendicular a la dirección plana del par.

81. Reducción de un sistema de vectores aplicados a un vector y un par.—Consideremos el caso simple de un vector aplicado $(A_1, \overline{V}_1)$ Individualizaremos el vector aplicado por el segmento orientado $\overline{A_1 B_1}$ y sea O el centro de reducción, tomando O como origen construyamos los segmentos orientados iguales y directamente opuestos e iguales en longitud y dirección al segmento orientado $\overline{A_1 B_1}$ tales como los $\overline{OB_2}$ y $\overline{OB_3}$, el $\overline{OB_2}$ será equipolente al $\overline{A_1 B_1}$ y $\overline{A_1 B_1}$ con el $\overline{OB_3}$ definen un par, de manera que para verificar la traslación del segmento orieutado $\overline{A_1 B_1}$ llevando su orígen a O ha sido necesario agregar un par de transporte. Para otro segmento $\overline{A_2 B_2}$ orientado que individualiza a otro vector aplicado $(A_2, \overline{V}_2)$ se haría la misma operación de manera que todos los segmentos orientados que individualizan a vectores podrán ser trasladados de suerte que su orígen sea O y asi mísmo se agregarán igual número de pares.

Componiendo los segmentos orientados trasladados se obtendrá el resultante y asi mismo componiendo los pares representados por ser momentos o ejes se tendrá el eje del par de transporte.

Como por cada uno de los ∞^3 puntos del espació se puede llevar a cabo tal reducción. El ente geométrico abstracto que corresponde a los ∞^3 segmentos orientados equipolentes y a los ∞^3 pares equipolentes, define el sistema reducido a un vector aplicado que es el *resultante* y a un par de vectores aplicados que es el *par resultante.* El vector aplicado $(O, \overline{V})$ será el *resultante de traslación* y el par de vectores aplicados $(A, \overline{V^*})$ $(O, -\overline{V^*})$ será el *par resultante de trasporte* representado por el vector aplicado momento $(O, \overline{M})$ eje del par trasporte.

Obsérvese por la transformación de pares que el punto A puede ser un punto determinado por $\delta = \frac{M}{V^*}$ dando el módulo V^* de los vectores del par.

82. Reducción de un sistema de vectores aplicados a dos vectores.— Eu el caso anterior hemos reducido el sistema a un vector y un par. Ahora si componemos el vector resultante de traslación $(O, \overline{V})$ con el vector del par del transporte $(O, -\overline{V^*})$ tendremos el vector resultante $(O, \overline{R})$ entonces el sistema quedará reducido a dos vectores $(O, \overline{R})$ y el otro $(A, \overline{V^*})$ del par, determinando A como en el caso anterior dando el vector $\overline{V^*}$ por su módulo V^*.

83. Reducción de un sistema de vectores aplicados a un solo vector.—Cuando el vector resultante de traslación se encuentre en la misma dirección plana que el par resultante de transporte entonces el par puede colocarse de manera que los vectores tengan la misma dirección que el vector resultante de traslación y además que el módulo de los vectores del par resultante sea igual al módulo de la resultante de traslación. Asi tendremos $\delta = \frac{M}{V}$. Componiendo el vector $(O, \overline{V})$ con $(O, -\overline{V})$ el resultante será igual cero y el sistema quedará reducido al vector $(A, \overline{V})$.

84. Vectores aplicados paralelos y del mismo sentido.—El sistema formado por dos vectoresaplicados paralelos y del mismo sentido es equivalente a un vector resultante aplicado en un punto que divide interiormente el segmento determinado por los puntos de aplicación de los dos vectores, en partes inversamente proporcionales a las respectivas longitudes o módulos (fig. 26).

En efecto sean dos vectores aplicados paralelos y del mismo sentido $(A_1, \vec{V}_1)$ y $(A_2, \vec{V}_2)$, individualizaremos dichos vectores por los segmentos orientados $\overline{A_1 B_1}$ y $\overline{A_2 B_2}$ que construiremos sobre las líneas de acción paralelas r_1 y r_2. El sistema considerado se reducirá al sistema equivalente formado por el segmento orientado resultante $\overline{A_1 B_1} + \overline{A_2 B_2}$ que pasará por un punto indeterminado todavía O (suma de segmentos orientados) que se encontrará siempre sobre la paralela trazada (línea de acción r) por él a las líneas de acción r_1 y r_2 de los segmentos componentes y será coplanar con éstos. Ahora la línea de acción del segmento orientado resultante $\overline{A_1 B_1} + \overline{A_2 B_2}$ interceptara en un cierto punto C a la transversal $A_1 A_1$ que une el orígen de los segmentos orientados componentes. El punto C será el orígen del segmento orientado resultante.

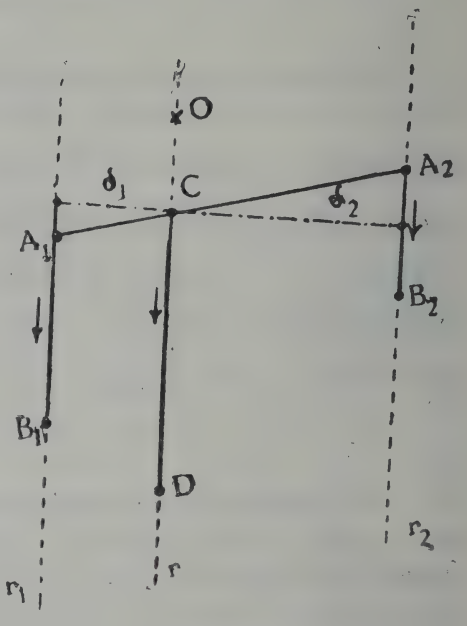


Fig. 26

El momento de cada uno de los segmentos orientados $\overline{A_1 B_1}$ y $\overline{A_2 B_2}$ respecto a cualquiera de los puntos de la línea de acción del segmento orientado resultante será siempre el mismo y en especial para C. Ahora como el momento del segmento orientado resultante con respecto a C es nulo, por lo tanto los momentos $\overline{Ca_1}$ y $\overline{Ca_2}$ de los segmentos orientados componentes son perpendiculares al plano determinado por las líneas de acción r_1 y r_2 y de sentido contrario y el origen de ellos será el punto C, su suma será igual a cero, lo que nos conduce a observar que el punto C estará comprendido entre las líneas de acción r_1 y r_2.

Como por cada uno de los ∞^3 puntos del espacio tridimensional se puede imaginar esta construcción obteniéndose asi en cada

punto de los ∞^3 un sistema equivalente al definido por los segmentos orientados $\overline{A_1 B_1}$ y $\overline{A_2 B_2}$.

El ente geométrico abstracto que corresponde a los ∞^3 segmentos orientados equipolentes $\overline{A_1 B_1} + \overline{A_2 B_2}$ define el vector aplicado resultante $(C, \overrightarrow{V})$ de tal manera que se tendrá

$$\overrightarrow{V} = \sum_{1\,u}^{2} \overrightarrow{V_u}$$

o bien simplemente

$$V = \sum_{1\,u}^{2} V_u$$

El ente geométrico abstracto que corresponde a los ∞^3 segmentos orientados equipolentes $\overline{Ca_1} - \overline{Ca_2} = 0$ define el vector aplicado momento resultante $(C, \overrightarrow{O})$ igual a cero, de modo que

$$\overrightarrow{M} = \sum_{1\,u}^{2} \overrightarrow{M_u} = O$$

o simplemente

(a) $$M = \sum_{1\,u}^{2} M_u = O$$

Como sabemos que los módulos

$$M_1 = V_1 \delta_1 \qquad M_2 = V_2 \delta_2$$

siendo δ_1 y δ_2 los brazos de palanca se deducen por la (a) que

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

como $\delta = \delta_1 + \delta_1$ se deduce que

$$\delta_1 = \frac{V_2}{V}\,\delta$$

85.—Vectores aplicados paralelos y de sentido opuesto.—El sistema de dos vectores aplicados paralelos de sentido opuesto y de longitud desigual equivale a un vector resultante aplicado en el punto que divide exteriormente el segmento que une los puntos de aplicación de los dos vectores en partes inversamente proporcionales a sus respectivas longitudes (fig. 27).

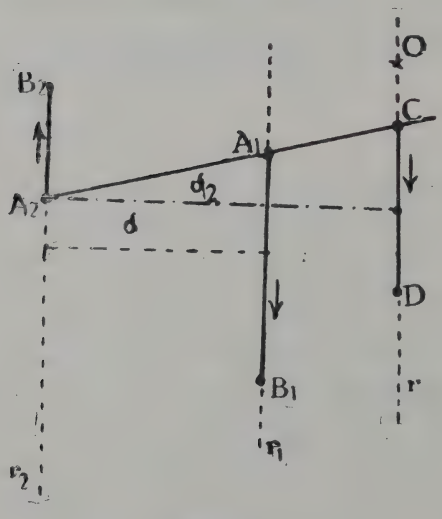


Fig. 27

En efecto, consideremos los dos vectores aplicados opuestos $(A_1, \overrightarrow{V_1})$ $(A_2, -\overrightarrow{V_2})$ siendo $\overrightarrow{V_1} > \overrightarrow{V_2}$.

Sean r_1 y r_2 las líneas de acción de los segmentos orientados $\overline{A_1 B_1}$ y $-\overline{A_2 B_2}$ opuestos que individualizan a los vectores dados. El sistema considerado se reducirá al sistema equivalente formado por el segmento orientado resultante $\overline{A_1 B_1} - \overline{A_2 B_2}$ que pasara por un cierto punto indeterminado O que se encuentra siempre sobre la paralela tra-

zada por dicho punto O a las líneas de acción r_1 y r_2 de los segmentos orientados componentes y será coplanar con éstos.

Ahora la línea de acción del segmento orientado resultante $\overline{A_1 B_1} - \overline{A_2 B_2}$ interceptora en un cierto punto C a la transversal $A_1 A_2$ que une el origen de los segmentos orientados componentes. El punto C será pues el origen del segmento orientado resultante:

El momento de cada uno de los segmentos orientados $\overline{A_1 B_1}$ y $-\overline{A_2 B_2}$ respecto a cualquiera de los puntos de la linea de acción del segmento orientado resultante será siempre el mismo y en especial para C.

Ahora como el momento del segmento orientado resultante con respecto a C es nulo, los momentos $\overline{Ca_1}$ y $\overline{Ca_2}$ de los segmentos orientados componentes son perpendiculares al plano determinado por las líneas de acción r_1 y r_2 y de sentido contrario y para que esto se realice teniendo en cuenta el sentido de los segmentos orientados componentes, deberá encontrarse el punto C no comprendido entre las líneas de acción r_1 y r_2.

El ente geométrico obstracto que corresponde a los ∞^3 segmentos orientados equipolentes $\overline{A_1 B_1} - \overline{A_2 B_2}$ define el vector aplicado resultante $(C, \overrightarrow{V})$ de manera que

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$$

o simplemente los módulos

$$V = V_1 - V_2$$

El ente geométrico abstracto que corresponde a los ∞^3 segmentos orientados equipolentes $\overline{Ca_1} - \overline{Ca_2} = O$, define el vector aplicado momento resultante $(C, \overrightarrow{O})$ igual a cero de modo que

$$\overrightarrow{M} = \sum_{1}^{2} \overrightarrow{M_u} \qquad \text{o bien} \qquad M = \sum_{1}^{2} M_u$$

como

$$M_1 = V_1 \delta_1 \qquad\qquad M_2 = V_2 \delta_2$$

se tendrá

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

de donde se tiene que

$$\delta_1 = \frac{V_2}{V} . \delta$$

teniendo presente que $V_1 > V_2$

$$A_1C < A_2C$$

C se encuentra en la prolongación de $A_1 A_2$ del lado de V_1

Como se observa la posición de C sobre la transversal $A_1 A_2$ depende solamente de la posición de los puntos A_1 y A_2 y de la relación $\frac{V_2}{V_1}$ permanecerá siempre la misma cualquiera que sea la dirección (común) de los dos vectores, así como la relación de los brazos de palanca, al punto C se le denomina *centro de vectores paralelos.*

En el caso particular que $\overline{V_1} = \overline{V_2}$ el sistema se reduce a un par, siendo $\overline{V} = 0$ y $\delta_1 = \infty$ nos dice que el par es irreductible, no puede ser reducido a un vector.

85. Determinación analítica del eje central.—Sea un sistema de vectores aplicados paralelos

$$(A_u, \overline{V}_u) \qquad \text{por} \quad u = 1,2,3, \cdots n$$

el vector resultante $(C, \overline{V})$ estará expresado por

$$\overline{V} = \sum_{1}^{n} {}_u \overline{V}_u$$

o simplemente por

$$V = \sum_{1}^{n} {}_u V_u$$

el momento resultante será

$$\overline{M} = \sum_{1}^{n} {}_u \overline{M}_u$$

o simplemente

$$M = \sum_{1}^{n} {}_u M_u$$

Las componentes según los ejes ortogonales del vector resultante $\overline{V}$ y de las componentes serán

$$X_w = \bar{\imath}_w \times \overline{V} = V \cos \alpha_w \qquad w = 1,2,3$$

$$X_{wv} = \bar{\imath}_w \times \overline{V}_{wv} = V_{wv} \cos \alpha_{wv} \qquad v = 1,2,3, \cdots n$$

Las componentes del momento resultante y de los componentes serán:

$$M_i = x_j X_k - x_k X_j \qquad i \neq j \neq k = 1,2,3$$

$$M_{iv} = x_{jv} X_{kv} - x_{kv} X_{jv} \qquad v = 1,2,3, \cdots n$$

o bien

$$M_i = V \left[x_j \cos \alpha_k - x_k \cos \alpha_j \right]$$

$$M_{iv} = V_{iv} \left[x_{jv} \cos \alpha_k - x_{kv} \cos \alpha_j \right]$$

Como

$$M_i = \sum_{1\,u}^{n} M_{iu}$$

por las anteriores se tendrá

$$V \left[x_j \cos \alpha_k - x_k \cos \alpha_j \right] = \sum_{1\,u}^{n} V_{iu} \left(x_{ju} \cos \alpha_k - x_{ku} \cos \alpha_j \right)$$

o bien

$$\left[\sum_{1\,u}^{n} V_{iu}\, x_{ju} - V x_j \right] \cos \alpha_k - \left[\sum_{1\,u}^{n} V_{iu}\, x_{ku} - V x_k \right] \cos \alpha_j = 0$$

luego

$$(1') \qquad \frac{\sum_{1\,u}^{n} V_{iu}\, x_{ju} - V x_j}{\cos \alpha_j} = \frac{\sum_{1\,u}^{n} V_{ia}\, x_{ku} - V x_k}{\cos \alpha_k} =$$

$$= \frac{\sum_{1\,u}^{n} V_{iu}\, x_{iu} - V x_i}{\cos \alpha_i}$$

siendo $\quad \imath \neq j \neq k = 1,2,3$

Estas ecuaciones que deben ser verificadas por las coordenadas por las x_u por $u = 1,2,3$ del punto de aplicación o punto asociado del vector resultante, dichas ecuaciones son las de una recta de dirección cos α_u por $u = 1,2,3$ que es el *eje central.*

87. Centro de vectores aplicados paralelos.—Cualquiera que sean α_u el eje central pasa por el punto de coordenadas x_w definido por las ecuaciones

$$(2') \qquad V x_w = \sum_{1\,u}^{n} V_{uw}\, x_{uw}$$

$$w = 1,2,3$$

este punto es fijo cualquiera que sea la dirección variable de los vectores ,mientras que los vectores paralelos conservan los mismos puntos de aplicación.

Despejando x_w en las (2') se deduce que

$$(3') \qquad x_w = \frac{\sum_{1u}^{n} V_{uw}\, x_{uw}}{V} \qquad v = 1,2,3$$

Estas fórmulas se pueden compendiar en una sola vectorial denominando A_u por $u = 1,2,3, \cdots n$ los puntos asociados a los vectores (puntos de aplicación) componentes, C el punto asociado al vector resultante y O el origen del sistema de coordenadas, entonces se tendrá

$$(4') \qquad C - O = \frac{\sum_{1u}^{n} V_u\,(A_u - O)}{V}$$

88. Momento con respecto a un plano de sistema de vectores aplicados.—Se denomina momento con respecto a un plano en un sistema de vectores paralelos positivos o negativos segun esten dirigidos en un sentido o en otro. Al producto de la longitud del vector (módulo) por la distancia del punto asociado (punto de aplicación) al plano, distancia que puede ser considerada como positiva de un lado del plano y como negativa del otro lado.

Las tres ecuaciones (3') nos dicen que cuando la resultante de un sistema de vectores paralelos esta aplicada en el centro de vectores paralelos, el momento de la resultante con relación a un plano cualquiera es igual a la suma de los momentos de las componentes con relación al mismo plano (suponiendo que la resultante $\overline{V} \neq 0$)

CAPITULO SEGUNDO

FUNCIONES DE NUMEROS

§ 1.—Derivación de un vector variable.—Derivación de un punto variable.

1. Vector variable.—Sea un parámetro variable t en un intervalo (t_0, t_1) que corresponde a un vector unívocamente determinado $\overline{V}$;

$$\overline{V} = \overline{V}(t)$$

expresará una función vectorial que nos dice: el vector variable $\overline{V}$ es función de la variante t.

Por ser $\overline{V} = \overline{\Phi}.V$, la función modular será

$$V = V(t)$$

La función vectorial será finita y contínua en el intervalo $t_1 - t_0$, cuando la diferencia modular

$$V(t_1) - V(t_0) < \epsilon ,$$

siendo ϵ infinitamente pequeño positivo alrededor del valor t.

Para un incremento $\triangle t$ deberá ser:

$$\frac{\triangle \overrightarrow{V}}{\triangle t} = \frac{\overrightarrow{V}(t + \triangle t) - \overrightarrow{V}(t)}{\triangle t} ;$$

la relación $\dfrac{\triangle \overrightarrow{V}}{\triangle t}$ define un vector que en el límite está expresado por

$$\lim \frac{\triangle \overrightarrow{V}}{\triangle t}_{\to 0} = \overrightarrow{V'} \quad ,$$

que es el vector derivada de $\overrightarrow{V}$.

Antes del límite, evidentemente

$$\frac{\triangle \overrightarrow{V}}{\triangle t} - \overrightarrow{V'} = \epsilon \quad ,$$

de donde

$$\triangle \overrightarrow{V} - \overrightarrow{V'} \triangle t = \epsilon \triangle t$$

y como en el límite $\triangle t = dt$ y la diferencial es la parte principal, será

$$d\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V'} dt \quad ;$$

y la derivada

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V}'$$

Análogamente se obtiene las derivadas del orden superior

$$\frac{d^{\nu}\vec{V}}{dt^{\nu}} \qquad \text{por } \nu = 1,2 \cdots n$$

En proyecciones se tendrán las escalares

$$\frac{d^{\nu} X_u}{dt^{\nu}}$$

por $\nu = 1,2,3, \cdots n$ y $u = 1,2,3$

Introduciendo los vectores unitarios, será:

$$\vec{V} = \sum_{1}^{3} \vec{\imath}_u X_u$$

siendo X_u por $u = 1,2,3$ funciones continuas de t, y por consiguiente, las derivadas X'_u, X''_u. Es evidente que

(b) $$\vec{V}' = \sum_{1}^{3} \vec{\imath}_u X'_u$$

$$\overline{V}'' = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u X''_u$$

Con más generalidad, si consideramos un vector $\overline{V}$ función de varias variables numéricas independientes, dos por ejemplo t y θ; la fórmula (b) nos permite inmediatamente introducir la noción de derivadas parciales:

1°. Sea $\overline{V}_u$ por $u = 1,2,3, \cdots n$ un número de vectores y a_u por $u = 1,2,3, \cdots n$ números fijos, se tendrá

$$\overline{V} = \sum_{1\,u}^{n} a_u \overline{V}_u$$

la derivada

$$\overline{V}' = \sum_{1\,u}^{n} a_u \overline{V}'_u$$

2°. Sea m y $\overline{V}_1$ un numero y un vector funciones de t.

Si

$$\overline{V} = m \overline{V}_1$$

será

$$\overline{V}' = m' \overline{V}_1 + m \overline{V}'_1$$

En efecto

$$\frac{\Delta \overrightarrow{V}}{\Delta t} = \frac{(m + \Delta m)\,(\overrightarrow{V_1} + \Delta \overrightarrow{V_1}) - m\overrightarrow{V_1}}{\Delta t} =$$

$$= m\,\frac{\Delta \overrightarrow{V_1}}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t}\,\overrightarrow{V_1} + \frac{\Delta m}{\Delta t}\,\Delta \overrightarrow{V_1}$$

de donde

$$\overrightarrow{V'} = m\,\overrightarrow{V'_1} + m'\,\overrightarrow{V_1}$$

3°. *Derivada de un producto escalar.*—Sean $\overrightarrow{V_1}$ y $\overrightarrow{V_2}$ dos vectores dependientes de t, la derivada de $\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2}$ será

$$(\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2})' = \overrightarrow{V'_1} \times \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2}'$$

En efecto

$$\frac{\Delta\,(\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2})}{\Delta t} = \frac{(\overrightarrow{V_1} + \Delta \overrightarrow{V_1})\,(\overrightarrow{V_2} + \Delta \overrightarrow{V_2}) - \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\Delta \overrightarrow{V_1}}{\Delta t} \cdot \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1}\,\frac{\Delta \overrightarrow{V_2}}{\Delta t} + \frac{\Delta \overrightarrow{V_1}}{\Delta t} \cdot \Delta \overrightarrow{V_2}$$

de donde

$$(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)' = \vec{V}'_1 \times \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \times \vec{V}'_2$$

4°. *Derivada del producto vectorial.*—Sea el producto vectorial

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \ ,$$

su derivada será

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)' = \vec{V}'_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}'_2$$

La demostración es semejante a la precedente. Es natural que al aplicar esta fórmnla tengamos en cuenta el órden de los factores.

5°. *Derivada de un producto mixto.*—Sea:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \times \vec{V}_3$$

que podemos escribir así.

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \times \vec{V}_3 \ :$$

su derivada será:

$$[(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \times \vec{V}_3]' = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)' \times \vec{V}_3 + (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \times \vec{V}'_3$$

y efectuando

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \times \vec{V}_3)' = \vec{V}'_1 \wedge \vec{V}_2 \times \vec{V}_3 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}'_2 \times \vec{V}_3 +$$

$$+ \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \times \vec{V}'_3$$

Estas son las fórmulas fundamentales que se retienen con facilidad a causa de su similitud con las fórmulas del análisis ordinario.

Obsérvese en el *producto escalar* cuando $\vec{V} = cte$

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 = \vec{V} \ ,$$

resulta

$$\vec{V} \times \vec{V}' = 0 \ ;$$

y cuando $\vec{V} = cte$ el *producto vectorial*

$$\vec{V} \wedge \vec{V}' = 0$$

la dirección del vector es fija.

2. Fórmula de Taylor.—Sea $\vec{V}(t)$ un vector función del parámetro t considerando un intervalo de variación para t tal como h, tendremos el valor $t + h$, luego el vector

$$\vec{V}(t + h) = \vec{V}(t) + \frac{h}{\lfloor 1} \vec{V}'(t) + \frac{h^2}{\lfloor 2} \vec{V}''(t) + \cdots + \frac{h^m}{\lfloor m} \vec{V}^m(t + \theta h)$$

cambiando t por t_0 y h en $t - t_0$ tendremos

$$\vec{V}(t) = \vec{V}(t_0) + \frac{t - t_0}{\lfloor 1} \vec{V}'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{\lfloor 2} \vec{V}(t_0) + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{(t-t_0)^m}{\lfloor m} \vec{V}[t_0 + \theta(t - t_0)]$$

3. Punto variable.—Sea un parámetro variable t que corresponde a un punto P de suerte que la función $P = P(t)$ define un punto variable, teniendo en cuenta la concepción de Grassmann se tiene:

$$\frac{\vec{\triangle P}}{\triangle t} = \frac{P(t + \triangle t) - P(t)}{\triangle t}$$

Como esta relación es un vector que cuando $\triangle t \to 0$ ella tiende a un límite determinado que es la derivada

$$\lim \frac{\vec{\triangle P}}{\triangle t \to 0} = \vec{P'(t)} = \vec{P'}$$

Si esta expresión la consideramos antes del límite, es decir cuando se aproxima indefinidamente hacia él, entonces podremos escribir:

$$\frac{\vec{\triangle P}}{\triangle t} - \vec{P'} = \epsilon$$

o bien:

$$\overline{\triangle P} = \overline{P'}\triangle t + \epsilon \triangle t$$

en la cual la parte principal de la suma define la diferencial del punto variable

$$\overline{dP} = \overline{P'}.dt$$

Ahora si P es función de t por intermedio de s, es decir

$$P = P(s) \quad \text{siendo} \quad s = s(t).$$

entonces:

$$\frac{\overline{dP}}{dt} = \frac{\overline{dP}}{ds} \quad \frac{ds}{dt}$$

En el caso que el punto P esté definido por la suma del punto O y de un vector $\overline{V}$ entonces $P = O + \overline{V}$ la derivada será:

$$\frac{\overline{dP}}{dt} = \frac{\overline{dO}}{dt}. + \frac{\overline{dV}}{dt}$$

cuando se considere al punto O, fijo $\dfrac{\overline{dO}}{dt} = O$ luego:

$$\frac{\vec{dP}}{dt} = \frac{\vec{dV}}{dt}$$

El teorema de la media nos da para el intervalo $t_1 - t$

$$P(t_1) - P(t) = (t_1 - t)\,\vec{P'}\,[t + \theta\,(t_1 - t)]$$

La serie de Taylor para el caso será:

$$P(t_1) = P(t) + \frac{t_1 - t}{\lfloor 1}\vec{P'}(t) + \frac{(t_1 - t)^2}{\lfloor 2}\vec{P''}(t) + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{(t_1 - t)^m}{\lfloor m}\,.\,\vec{P^m}\,[t + \theta\,(t_1 - t)]$$

§ 2.—Integración vectorial

Consideremos que $\vec{V}$ sea un vector variable función continua de un parámetro t en un genérico intervalo $t_1 - t_0$ la diferencial geométrica será:

$$\vec{d\,I} = \vec{V}\,dt$$

la integral definida de $\vec{V}$ en dicho intervalo se expresa por:

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{V}\, dt$$

§ 3.—Teoria de las curvas gausas.—Generalidades.—Terna principal. Plano osculador.—Curvatura.

4. Ecuación paramétrica de una curva.—Una curva en el espacio ordinario es considerada como el lugar geométrico de los puntos P de manera que a cada punto P corresponde un solo valor del parámetro s o al contrario.

La función

$$P = P(s) \tag{1}$$

es la *ecuación paramétrica de la curva.*

La derivada de la función anterior es

$$\frac{d\vec{P}}{ds} = \vec{P}'(s) = \vec{\tau} \tag{2}$$

es un versor $\vec{\tau}$ paralelo a la tangente en P.

Como s mide el arco de curva comprendido entre un punto O y el punto genérico P, dicho versor tendrá el sentido en que el arco crece.

El plano que pasa por el punto P normal al versor $\vec{\tau}$ se denomina *plano normal* en el punto P, todas las rectas contenidas en él serán normales a $\vec{\tau}$.

El versor $\vec{\tau}$ goza de las propiedades

$$(3) \qquad \vec{\tau} \times \vec{\tau} = \tau^2 = 1 \qquad \frac{d\vec{\tau}}{ds} \times \vec{\tau} = 0$$

esta última nos demuestra que el vector $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ es normal al versor $\vec{\tau}$ es decir paralelo a la normal, entonces:

$$(4) \qquad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{n}\, C$$

Representando por $d\alpha$ el ángulo de contingencia que corresponde al punto P de la curva, es evidente que $ds = \rho d\alpha$ en la que ρ es el radio de flexión, luego:

$$(5) \qquad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{d\alpha} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{\vec{n}}{\rho}$$

siendo $\vec{n}$ el versor paralelo a la *normal principal.*

Los versores $\vec{\tau}$ y $\vec{n}$ definen un plano que es el *plano osculador* de la curva en el punto P que corresponde a la dirección plana definida por $\vec{\tau} \wedge \vec{n} = \vec{b}$, siendo $\vec{b}$ el versor paralelo a la *binormal.*

La terna definida por los versores $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ y $\vec{b}$ se denomina la *terna principal,* en el punto P varia su orientación de un punto a a otro de la curva al variar s.

5. Plano osculador.—Como sabemos ya es el plano que pasando por P contiene a la tangente y a la normal principal, este plano goza de una importante propiedad característica en virtud de la cual se le da la denominación de *plano osculador.*

Pasemos a determinar dicha propiedad: consideremos dos puntos vecinos de una curva gausa, tales como $P(s)$ y $P(s+h)$, podremos calcular la distancia δ del punto $P(s+h)$ al plano osculador, la que estará dada por la componente del vector $P(s+h) - P(s)$ segun la binormal que es

$$\delta = \vec{b} \times [P.(s+h) - P(s)] \tag{6}$$

la serie de Taylor nos conduce a la

$$\delta = \vec{b} \times \sum_{1u}^{\infty} \frac{h^u}{\lfloor u} \vec{P}^u(s) \tag{7}$$

y como

$$\vec{b} \times P'(s) = \vec{b} \times \vec{\tau} = 0$$

$$\vec{b} \times P''(s) = \vec{b} \times \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{b} \times \frac{\vec{n}}{\rho} = 0$$

la anterior (7) se reduce a la

$$\delta = \vec{b} \times \sum_{3u}^{\infty} \frac{h^u}{\lfloor u} \vec{P}''(s) \tag{8}$$

Obsérvese que esta distancia está expresada cuando menos por un infinitamente pequeño de tercer orden, lo que no acontecería si se proyectara la cuerda sobre una dirección distinta de $\vec{b}$, caracterizando por este hecho al plano osculador. La expresión anterior nos hace ver que el signo δ cambia con h, mientras no sea $\vec{P}''(s) \times \vec{b} = 0$, lo que prueba que la curva atravieza en P al plano oscucular.

Se deduce tambien que el plano osculador en $P(s)$ pasa por $P(s + h)$. conteniendo por consiguiente a las tangentes trazadas por $P(s)$ y $P(s + h)$ y sus dos normales principales infinitamente proximas.

La circunferencia que pasa por $P(s)$ definida por tres puntos del plano osculador indefinidamente próximos, tiene común con la curva las dos normales principales infinitamente próximas que en su intersección determinan el centro c de curvatura, dicho círculo se denomina *circulo osculador.*

Si en el plano osculador consideramos los puntos P y S, deberá satisfacer la ecuación

$$(P - S) \times \vec{b} = 0$$

o bien

$$(P - S) \times \vec{\tau} \wedge \vec{n} = 0$$

6. **Curvatura.**—La ecuación $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho}$ multiplicada escalarmente por el versor $\vec{n}$, teniendo presente la (4) se tiene por comparación.

(9) $$C = \vec{n} \times \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

$\frac{1}{\rho}$ expresa la *primera curvatura o de flexión* en el punto P.

Veámos ahora como varia el versor $\vec{b}$ al variar el arco s, es evidente que

$$\vec{b} \times \vec{b} = b^2 = 1 \quad \text{y} \quad \vec{b} \times \vec{\tau} = 0 \tag{10}$$

las derivadas serán

$$\frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{b} = 0 \qquad \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{\tau} + \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{b} = \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{\tau} = 0 \tag{11}$$

estas dos ecuaciones nos expresan que el vector $\frac{d\vec{b}}{ds}$ es perpendicular al mismo tiempo a los versores $\vec{b}$ y $\vec{\tau}$ es decir paralelo al versor $\vec{n}$ entonces podremos escribir.

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{n}N \tag{12}$$

siendo N un número positivo negativo o nulo.

Ahora el vector

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{d\beta} \frac{d\beta}{ds} = \frac{\vec{n}}{T} \tag{13}$$

siendo *T el radio de curvatura por torsión.*

Comparando las (12) y (13) se deduce que

$$N = \frac{1}{T} \tag{14}$$

expresa la *segunda curvatura o de torsión* en el punto *P*.

§ 4.—Fórmulas de Frenet.—Ecuaciones intrínsecas

7. Como $\vec{n} = \vec{n}(s)$ y

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau} \tag{15}$$

derivándolas con respecto a s tendremos

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \wedge \vec{\tau} + \vec{b} \wedge \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{\tau}}{T} + \frac{\vec{b} \wedge \vec{n}}{\rho} \tag{16}$$

o simplemente

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{b}}{T} - \frac{\vec{\tau}}{\rho} \tag{17}$$

El conjunto de las fórmulas

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho} \qquad \frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{\tau}}{\rho} - \frac{\vec{b}}{T} \qquad \frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{\vec{n}}{T} \tag{18}$$

que dan las derivadas según las tres direcciones principales son las *fórmulas de Frenet.*

si hacemos

$$\vec{u} = -\frac{\vec{\tau}}{T} + \frac{\vec{b}}{\rho} \tag{19}$$

podremos expresar la primera en la forma siguiente:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{u} \wedge \vec{\tau} \tag{20}$$

la segunda

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{u} \wedge \vec{n} \tag{21}$$

y la tercera

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{u} \wedge \vec{b} \tag{22}$$

8. En coordenadas cartesianas, será

$$P - O = \sum_{1}^{3} i_u x_u \quad , \tag{23}$$

los cosenos de $\vec{\tau}$ estarán expresados por

$$\frac{dx_u}{ds} \qquad \text{por } u = 1,2,3 \ ,$$

los de $\vec{n}$ por

$$\rho \frac{d^2x_u}{ds^2} \qquad \text{por } u = 1,2,3$$

y; los de $\vec{b}$ por

$$\rho \left[\frac{dx_2}{ds} \times \frac{d^2x_3}{ds^2} - \frac{dx_3}{ds} \times \frac{d^2x_2}{ds} \right]$$

La curvatura por flexión

$$(24) \qquad \frac{1}{\rho} = \vec{n} \times \vec{P''} = \text{mód } P'' = \sqrt{\sum_{1}^{3} u \frac{d^2x_u}{ds^2}}$$

y la curvatura por torsión

$$(25) \qquad \frac{1}{T} = -\rho \vec{b} \times \vec{P''} = -\rho^2 \begin{vmatrix} \frac{dx_u}{ds} \\ \frac{d^2x_u}{ds^2} \\ \frac{d^3x_u}{ds^3} \end{vmatrix} \begin{matrix} u = 3 \\ \\ \\ u = 1 \end{matrix}$$

§ 6.—Campos escalares y vectoriales.

9. Campos escalares.—Se denomina campo escalar a una cualquiera región del espacio o a todos los puntos del espacio tales que a cada uno de los puntos corresponde una magnitud escalar (en general variable de un punto a otro). El campo escalar estará definido pues por el conjunto de los valores de la variable escalar en los diversos puntos de la región del espacio o en la totalidad del espacio considerado.

Como a cada punto de la región o del espacio debera corresponder un número real positivo, negativo o cero (magnitud algebraica) el conjunto de estos valores definirán al campo escalar. Por consiguiente la magnitud escalar U sera una función completamente determinada dependiendo de la posición del punto P,

Si la función escalar U varía debido a un parámetro (tiempo) el campo escalar será *variable.*

Si la función escalar U es independiente de algún parámetro (tiempo) el campo escalar es *estacionario.*

Sea un campo escalar tridimensional, P un punto cualquiera, t un parámetro variable y U una función escalar. Las funciones

$$U = U(P, t) \qquad \text{define un campo variable}$$

$$U = U(P) \qquad \text{define un campo estacionario}$$

La representación más clara de un campo escalar está dada por la ecuación

$$U(P, t) = cte$$

que define una superficie de nivel o equipotencial compleja, o bien por

$$U(P) = \text{cte}$$

que define una superficie de nivel o equipotencial simple.

10. Campos vectoriales.—Se denomina campo vectorial a una región cualquiera del espacio o a todos los puntos del espacio tales que a cada uno corresponde una magnitud geométrica o vectorial cuyo ente representativo es el vector (en general variable de un punto a otro). El campo vectorial estará pues definido por el conjunto de los valores de la variable vectorial individualizada por uno de los ∞^3 segmentos orientados equipolentes que tienen por origen los puntos asociados que determinan el campo (vectores aplicados).

A cada punto P del espacio o región del espacio corresponderá asociado a un vector $\overrightarrow{V}$ bien determinado o el valor de una determinada magnitud vectorial. O bien existe un vector $\overrightarrow{V}$ función del punto P (uniforme o sea unívocamente determinada).

Si la función geométrica $\overrightarrow{V}$ varía con un parámetro (tiempo) el campo vectorial será *variable.*

Si la función geométrica $\overrightarrow{V}$ es independiente del parámetro (tiempo) el campo vectorial es *estacionario.*

Sea C un campo vectorial en el espacio tridimencional y $\overrightarrow{V}$ el vector función geométrica

$\overrightarrow{V}(P, t)$ que define un campo variable

$\overrightarrow{V}(P)$ que define un campo estacionario

Un campo vectorial puede representarse por líneas vectoriales o sean líneas tales que el vector correspondiente en cada punto le es tangente.

Se conviene en eligir como sentido positivo de una línea vectorial, el sentido en el cual está orientado el vector en cada punto de la línea.

Sea una línea vectorial cualquiera a la cual corresponde el punto P, el corrimiento elemental vector $\overrightarrow{dP}$ deberá tener la misma dirección y el mismo sentido del vector $\overrightarrow{V}$ en P es decir que

$$\overrightarrow{dP} = \overrightarrow{\tau}\, ds \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\tau}\, V$$

siendo $\overrightarrow{\tau}$ el versor qúe corresponde o es paralelo a la tangente en P, como la dirección de la tangente es la misma que la dirección del vector $\overrightarrow{V}$ la línea vectorial resulta definida en una porción del campo en que el vector no sea nulo por el ente geométrico abstracto que se puede hacer corresponder a las ∞^2 curvas integrales equipolentes dadas por el sistema diferencial

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \frac{dx_3}{X_3} \tag{26}$$

Como los vectores $\overrightarrow{dP}$ y $\overrightarrow{V}$ tienen la misma dirección y el mismo sentido, las igualdades anteriores se verificarán a todo lo largo de las lineas vectoriales. Estas ecuaciones en las cuales se sustituyen X_u por $u = 1,2,3$ por sus valores en función de x_u por $u = 1,2,3$ definen las líneas integrales,

El sistema (26) es equipolente a un sistema de dos ecuaciones de primer orden con dos funciones incógnitas de una sola variable. Asi tendremos:

$$\frac{dx_1}{dx_3} = \frac{X_1}{X_3} \qquad \frac{dx_2}{dx_3} = \frac{X_2}{X_3} \tag{27}$$

CAPITULO TERCERO

§ 1.—Funciones de puntos.

1. Dada la función que define un campo escalar o vectorial, se puede de diversas maneras deducir otras (de la misma manera que de una función de una variable numérica se deducen sus derivados de de diversas órdenes).

Tres de estas funciones son especialmente importantes,

1°. El gradiente función vectorial deducida de de una función escalar.

2°. La divergencia función escalar deducida de una función vectorial.

3°. El rotacional, función vectorial deducida de una función vectorial.

Sus propiedades de invariancia explican que se les vea figurar con tanta frecuencia en las fórmulas de la Mecánica y de la Física Matemática.

2 Gradiente.—Se denomina gradiente de una función escalar U el vector que tiene por componentes $\frac{\partial U}{\partial x_u}$ por $u = 1,2,3$

En efecto una función escalar $U = U(P)$ dependiente del punto variable P derivada define un campo vectorial que se denomina gradiente de U.

El gradiente está determinado por la derivada según la línea de máxima pendiente del campo o sea la normal a las líneas de nivel o equipotenciales, es decir como ya sabemos para aquellas para las cuales la función escalar U se conserva constante siendo por consiguiente tangente a las líneas vectoriales.

Sea O un punto elegido fijo, el vector $P - O = \overline{\Phi} r$ define la la posición de P.

Diferenciando la anterior respecto a la normal a las líneas o a las superficies equipotenciales, es decir, según la línea vectorial se tiene:

(1) $$\frac{d\overline{P}}{dn} = \overline{\Phi}\,\frac{dr}{dn} \qquad \frac{dU}{d\overline{P}} = \frac{dU}{dn}\cdot\frac{dn}{d\overline{P}}$$

(2) $$dn = \overline{\eta} \times d\overline{P}$$

(3) $$dU = \frac{dU}{dn}\,dn \qquad \text{siendo} \qquad \overline{\eta} \times \overline{\eta} = 1$$

se obtiene

(4) $$dU = \overline{\eta}\,\frac{dU}{dn} \times d\overline{P} = \overline{V} \times d\overline{P}$$

de donde

(5) $$\frac{dU}{d\overline{P}} = \overline{\eta}\,\frac{dU}{dn} = \text{grad } U \;\text{x}$$

luego

$$dU = \text{grad } U \times \overrightarrow{dP} \tag{6}$$

En coordenadas cartesianas, como

$$P = O + \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u x_u \tag{7}$$

$$\text{grad } U = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u \frac{\partial U}{\partial x_u} \tag{8}$$

3. Gradiente de la distancia.—Sea r la distancia no nula del punto P a un punto o a una recta o a un plano fijos, O el punto fijo ó el pie de la perpendicular bajada del punto P sobre la recta o al plano. En la fórmula general del gradiente:

$$\text{grad } U = \overrightarrow{\Phi} \frac{dU}{dn}$$

haciendo $U = r$ $\quad n = r$ se tiene

$$\text{grad } r = \overrightarrow{\Phi} = \frac{P - O}{r} \tag{9}$$

es decir que el gradiente es el versor dirigido de O hacia el punto variable y por consiguiente normal a la recta o al plano.

Ahora como

$$r^2 = (P - O)^2$$

diferenciándola y dividiendo por r se tiene

$$(10) \qquad dr = \frac{P - O}{r} \times (\overrightarrow{dP} - \overrightarrow{dO}) = \frac{P - O}{r} \times \overrightarrow{dP} -$$

$$- \frac{P - O}{r} \times \overrightarrow{dO}$$

Cuando se considera O fijo $\overrightarrow{dO} = 0$ es el pie de la perpendicular bajada de P sobre la rec-a a sobre el plano

$$(P - O) \times \overrightarrow{dO} = O$$

luego

$$(11) \qquad dr = \frac{P - O}{r} \times \overrightarrow{dP} = \text{grad } r \times \overrightarrow{dP}$$

de donde

$$(12) \qquad \frac{dr}{\overrightarrow{dP}} = \frac{P - O}{r} = \text{grad } r$$

4. Propiedades del gradiente.—1°. Es un invariante con relación al triedro de referencia.

En efecto sea el gradiente de la función escalar U, grad U referida a la terna $\bar{\imath}_u$ por $u = 1,2,3$ como

$$U = U(P) \qquad \text{y} \qquad P - O = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u x_u$$

siendo O fijo origen de la terna

$$\overline{dP}^{\,\rightarrow} = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u \, dx_u \tag{13}$$

y como sabemos que

$$dU = \text{grad } U \times \overline{dP}^{\,\rightarrow} = \sum_{1\,u}^{3} \frac{\partial U}{\partial x_u} \, dx_u \tag{14}$$

Para otra terna $\bar{\jmath}_u$ por $u = 1,2,3$ se deduce análogamente que

$$dU = \text{grad}_1 \, U \times \overline{dP}^{\,\rightarrow} = \sum_{1\,u}^{3} \frac{\partial U}{\partial x_u} \, dx_u \tag{15}$$

restándolas se tiene

$$(\text{grad}_1 \, U - \text{grad } U) \times \overline{dP}^{\,\rightarrow} = 0 \tag{16}$$

(17) $$\text{grad}_1\ U = \text{grad}\ U$$

que demuestra la invariancia, luego el gradiente es un *invariante diferencial*

2°. Consideremos la función definida por

(18) $$F = F(U_u)_{u=1}^{u=n}$$

siendo U_u funciones escalares y que F admite derivadas parciales, teniendo presente la (15) se tiene

(19) $$\vec{dP} \times \sum_{1\,u}^{n} i_u \frac{\partial F}{\partial U_u} = \sum_{1\,u}^{n} \frac{\partial F}{\partial U_u}\, dU_u = dF$$

de la cual resulta que el símbolo grad se comporta como el símbolo diferencial de manera que podrán aplicarse las reglas dadas en la diferenciación, así se tendrá:

(20) $$\text{grad} \sum_{1\,u}^{n} U_u = \sum_{1\,u}^{n} \text{grad}\ U_u$$

5. **Divergencia.**—Se denomina divergencia de una función vectorial $\vec{V}$ la función escalar $\sum_{1\,u}^{3} \frac{\partial X_u}{\partial x_u}$ en la cual X_u por $u = 1,2,3$, son las componentes de $\vec{V}$.

En efecto sea la función vectorial $\vec{V} = \vec{V}(P)$, dependiente del punto variable P, los números que miden las coordenadas carte-

sianas de P (módulos) son x_u por $u = 1,2,3$ la función escalar

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{div} \vec{V} = \sum_{1}^{3} \vec{\imath}_u \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u}$$

se denomina *divergencia.* Ahora como

$$\vec{V} = \sum_{1}^{3} \vec{\imath}_u X_u$$

o bien

$$X_u = \vec{\imath}_u \times \vec{V} \qquad u = 1,2,3$$

es evidente que

$$\text{(22)} \qquad \operatorname{div} \vec{V} = \sum_{1}^{3} \frac{\partial X_u}{\partial x_u}$$

6. Divergencia de la distancia.—Sea O un punto fijo, la coordenada vectorial de P será

$$\text{(23)} \qquad P - O = \vec{\Phi r}$$

en este caso particular

$$\vec{V} = P - O$$

$$X_u = \bar{\imath}_u \times (P - O) = \bar{\imath}_u \times \overrightarrow{\Phi r} = x_u \tag{24}$$

entonces

$$\operatorname{div}(P - O) = 3 \tag{25}$$

7. Rotaciónal.—Se denomina *rotacional o curl* de una función vectorial $\vec{V}$ la función vectorial que tiene por componentes

$$\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \qquad \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}$$

En efecto sea la función vectorial $\vec{V} = \vec{V}(P)$ los números que miden las coordenadas cartesianas de P son x_u por $u = 1,2,3$ la función vectorial

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u} \tag{26}$$

se denomina *rotacional o curl.* Ahora como

$$\vec{V} = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u X_u$$

entendiendose que la función $\vec{V}$ depende las variables independientes x_u por $u = 1,2,3$ es decir que existiran derivadas parciales entonces.

$$(27) \qquad \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial x_u} = \sum_{1\,v}^{3} \bar{\imath}_v \frac{\partial X_v}{\partial x_u} \qquad \text{por } u = 1,2,3$$

reemplazando en la (26) se tendrá para el rotacional la expresión

$$(28) \qquad \operatorname{rot} \overrightarrow{V} = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u \wedge \sum_{1\,v}^{3} \bar{\imath}_v \frac{\partial X_v}{\partial x_u}$$

teniendo en cuenta las propiedades de los versores fundamentales de una terna ortogonal la (28) se reduce a la forma

$$(29) \qquad \overrightarrow{\Gamma} = \operatorname{rot} \overrightarrow{V} = \bar{\imath}_1 \left[\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \right] + \bar{\imath}_2 \left[\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \right] +$$

$$+ \bar{\imath}_3 \left[\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right]$$

$$(30) \qquad \overrightarrow{\Gamma} = \operatorname{rot} \overrightarrow{V} = \begin{vmatrix} \bar{\imath}_1 & \bar{\imath}_2 & \bar{\imath}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix}$$

Multiplicando escalarmente la (29) por $\bar{i}_u$ por $u = 1,2,3$ se deducen las componentes.

$$\Gamma_1 = \frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}$$

(31)
$$\Gamma_2 = \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}$$

$$\Gamma_3 = \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}$$

8. Propiedades de la divergencia y el rotacional.—1°. La divergencia y el rotacional son independientes de la terna de referencia, son tambien como el gradiente un invariante.

En efecto sea la función vectorial $\overline{V} = \overline{V}(P)$ sean $\vec{a}_u$ por $u = 1,2,3$ tres vectores fijos no coplanares. Podemos descomponer $\overline{V}$ según dichos tres vectores y podremos escribir:

(32)
$$\overline{V} = \sum_{1}^{3} \overline{a}_u U_u$$

U_u representan funciones escalares definidas

(33)
$$\text{div } \overline{V} = \sum_{1}^{3} \vec{a}_u \times \text{gra } U_u$$

$$\text{(34)} \qquad \text{rot } \vec{V} = \sum_{1}^{3} a_u \wedge \text{grad } U_u$$

Nos permiten observar que la divergencia y el rotacional se expresan en función de los vectores $\vec{a}_u$ y de los gradientes de las funciones escalares U_u y que estos elementoa son independientes de la terna elegida. De modo que la divergencia y el rotacional son *invariantes diferenciales.*

2°. Cuando los vectores $\vec{a}_u = \vec{\imath}_u$ vectores fundamentales de la terna, entonces:

$$\text{div } \vec{V} = \sum_{1}^{3} \vec{\imath}_u \times \text{grad } X_u$$

(35)

$$\text{rot } \vec{V} = \sum_{1}^{3} \vec{\imath}_u \wedge \text{grad } X_u$$

que como sabemos dan la divergencia y el rotacional de una función vectorial $\vec{V}$ en función de los gradientes de sus componentes.

3°. Si U y $\vec{V}$ representan un escalar y un vector constantes se deduce

$$\text{grad } U = 0 \qquad \text{div } \vec{V} = 0 \qquad \text{rot } \vec{V} = 0$$

4°. La divergencia y el rotacional gozan de reglas análogas a las de diferenciación

(36) $$\operatorname{div} \sum_{1\,u}^{n} \vec{V}_u = \sum_{1\,u}^{n} \operatorname{div} \vec{V}_u$$

(37) $$\operatorname{rot} \sum_{1\,u}^{n} \vec{V}_u = \sum_{1\,u}^{n} \operatorname{rot} \vec{V}_u$$

5°. Sea un escalar U y un vector $\vec{V}$ funciones del punto P

(38) $$\operatorname{div} (U.\vec{V}) = \sum_{1\,u}^{3} \vec{\imath}_u \times \frac{\partial\,(U.\vec{V})}{\partial x_u}$$

$$\operatorname{div} (U.\vec{V}) = U \sum_{1\,u}^{3} \vec{\imath}_u \times \frac{\partial\,\vec{V}}{\partial x_u} + \vec{V} \times \sum_{1\,u}^{3} \vec{\imath}_u \frac{\partial U}{\partial x_u}$$

(39) $$\operatorname{div} (U.\vec{V}) = U \operatorname{div} \vec{V} + \operatorname{grad} U \times \vec{V}$$

(40) $$\operatorname{rot} (U.\vec{V}) = \sum_{1\,u}^{3} \vec{\imath}_u \wedge \frac{\partial (U.V)}{\partial x_u}$$

$$\operatorname{rot} (U.\vec{V}) = U \sum_{1\,u}^{3} \vec{\imath}_u \wedge \frac{\partial\,\vec{V}}{\partial x_u} - \vec{V} \wedge \sum_{1\,u}^{3} \vec{\imath}_u \frac{\partial U}{\partial x_u}$$

(41) $$\operatorname{rot} (U.\vec{V}) = U \operatorname{rot} \vec{V} + \operatorname{grad} U \wedge \vec{V}$$

6ª. Sean $\overline{V}$ y $\overline{W}$ dos funciones vectoriales dependientes del punto P variable

$$\text{(42)} \qquad \operatorname{div}(\overline{V} \wedge \overline{W}) = \sum_{1u}^{3} \bar{\imath}_u \times \frac{\partial(\overline{V} \wedge \overline{W})}{\partial x_u} =$$

$$= \sum_{1u}^{3} \bar{\imath}_u \times \left[\frac{\partial \overline{V}}{\partial x_u} \wedge \overline{W} + \overline{V} \wedge \frac{\partial \overline{W}}{\partial x_u} \right] =$$

$$= \overline{W} \times \sum_{1u}^{3} \bar{\imath}_u \wedge \frac{\partial \overline{V}}{\partial x_u} - \overline{V} \times \sum_{1u}^{3} \bar{\imath}_u \wedge \frac{\partial \overline{W}}{\partial x_u}$$

$$\text{(43)} \qquad \operatorname{div}(\overline{V} \wedge \overline{W}) = \overline{W} \times \operatorname{rot} \overline{V} - \overline{V} \times \operatorname{rot} \overline{W}$$

En el caso particular que $\overline{W} = \overline{a} = cte$ vector constante entonces $\operatorname{div}(\overline{V} \wedge \overline{a}) = \overline{a} \times \operatorname{rot} \overline{V}$.

$$\text{(44)} \qquad \operatorname{rot} \operatorname{grad} U = \operatorname{rot} \sum_{1u}^{3} \bar{\imath}_u \frac{\partial U}{\partial x_u} = \sum_{1v}^{3} \bar{\imath}_v \wedge \frac{\partial \sum_{1u}^{3} \bar{\imath}_u \frac{\partial U}{\partial x_u}}{\partial x_v} = 0$$

por no ser conmutativo el producto vectorial

$$(45)\quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V} = \operatorname{div}\sum_{1u}^{3}\bar{\imath}_u \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u} = \sum_{1u}^{3}\bar{\imath}_v \times \frac{\partial \sum_{1u}^{3}\bar{\imath}_u \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u}}{\partial x_v} = 0$$

por las propiedades del producto mixto

$$(46)\quad \triangle_2 U = \operatorname{div}\operatorname{grad} U = \operatorname{div}\sum_{1u}^{3}\bar{\imath}_u \frac{\partial U}{\partial x_u}$$

$$(47)\quad \triangle_2 U = \sum_{1u}^{3}\bar{\imath}_u \times \frac{\partial \sum_{1u}^{3}\bar{\imath}_u \frac{\partial U}{\partial x_u}}{\partial x_v} = \sum_{1v}^{3}\frac{\partial^2 U}{\partial x_u^2}$$

es un escalar.

$$(48)\quad \triangle_2 \vec{V} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} - \operatorname{rot}.\operatorname{rot}\vec{V} =$$

$$= \operatorname{grad}\sum_{1u}^{3}\bar{\imath}_u \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u} - \operatorname{rot}\sum_{1u}^{3}\bar{\imath}_u \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u} =$$

$$= \sum_{1v}^{3}\bar{\imath}_v \frac{\partial \sum_{1u}^{3}\bar{\imath}_u \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u}}{\partial x_v} - \sum_{1v}^{3}\bar{\imath}_v \wedge \frac{\partial \sum_{1u}^{3}\bar{\imath}_u \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u}}{\partial x_v}$$

$$(49)\qquad \Delta_2 \vec{V} = \vec{\imath}_1 \left\{ \frac{\partial^2 X_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 X_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 X_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right\} +$$

$$+ \vec{\imath}_2 \left\{ \frac{\partial^2 X_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 X_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 X_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right\} +$$

$$+ \vec{\imath}_3 \left\{ \frac{\partial^2 X_1}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 X_2}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 X_3}{\partial x_3^2} \right\} -$$

$$- \vec{\imath}_1 \left\{ \frac{\partial^2 X_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 X_3}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 X_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 X_1}{\partial x_3^2} \right\} -$$

$$- \vec{\imath}_2 \left\{ \frac{\partial^2 X_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 X_1}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 X_2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 X_2}{\partial x_1^2} \right\} -$$

$$- \vec{\imath}_3 \left\{ \frac{\partial^2 X_1}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 X_2}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 X_3}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 X_3}{\partial x_2^2} \right\}$$

que se reduce a la

$$(50)\qquad \Delta_2 \vec{V} = \sum_{1}^{3}{}_{\nu} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x_\nu^2}$$

es un vector.

A las funciones $\Delta_2 U$ y $\Delta_2 \vec{V}$ se les denomina las *Laplacianas*.

9. Vector simbólico.—Para abreviar suele usarse una tórmula simbólica para expresar el vector cuando intervienen símbolos de derivación, asi la delta invertida que se le ha denominado *nabla*.

$$\nabla = \sum_{1}^{3} \bar{\imath}_u \frac{\partial}{\partial x_u} \tag{51}$$

1°. Para el gradiente

$$\nabla U = \sum_{1}^{3} \bar{\imath}_u \frac{\partial U}{\partial x_u} = \text{grad } U \tag{52}$$

2°. Para la divergencia:

$$\nabla \times \vec{V} = \sum_{1}^{3} \bar{\imath}_u \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u} = \text{div } \vec{V} \tag{53}$$

3°. Para el rotacional o curl:

$$\nabla \wedge \vec{V} = \sum_{1}^{3} \bar{\imath}_u \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u} = \text{rot } \vec{V} \tag{54}$$

10. Relación entre las tres funciones divergencia, gradiente y rotacional.—1°. Si $\vec{a}$ es un versor constante, es evidente que

$$(55)\qquad \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u} \times \vec{a}\,\vec{\imath}_u \times \vec{a} + \vec{\imath}_u \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u}\vec{a} \times \vec{a} -$$

$$- \vec{a} \times \vec{\imath}_u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u} \times \vec{a} = \vec{\imath}_u \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u} \qquad \text{por} \quad u = 1,2,3$$

que puede ser escrita asi:

$$(56)\quad \vec{\imath} \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u} = \left[\vec{\imath}_u \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u} \times \vec{a} \right) - \vec{\imath}_u \wedge \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u} \wedge \vec{a} \right) \right] \times \vec{a}$$

teniendo presente que

$$(57)\qquad \text{grad}\,(\vec{V} \times \vec{a}) = \sum_{1u}^{3} \vec{\imath}_u \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u} \times \vec{a} \right)$$

$$(58)\qquad \text{rot}\,(\vec{V} \wedge \vec{a}) = \sum_{1u}^{3} \vec{\imath}_u \wedge \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u} \wedge \vec{a} \right)$$

inmediatamente se deduce:

$$(59) \qquad \operatorname{div} \vec{V} = \sum_{1u}^{3} \vec{\imath}_u \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u} = [\operatorname{grad} (\vec{V} \times \vec{a}) -$$

$$- \operatorname{rot} (\vec{V} \wedge \vec{a})] \times \vec{a}$$

fórmula que relaciona las tres funciones que es muy importante.

2°. El punto P esta definido por la expresión

$$P = O + \sum_{1u}^{3} \vec{\imath}_u x_u$$

y el rotacional

$$(60) \qquad \operatorname{rot} \vec{V} = \sum_{1u}^{3} \vec{\imath}_u \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u}$$

multiplicando escalarmente por $\vec{dP}$ y vectorialmente por $\vec{\delta P}$ se tiene

$$(61) \qquad \operatorname{rot} \vec{V} \times \vec{dP} \wedge \vec{\delta P} = \sum_{1u}^{3} \vec{\imath}_u \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_u} \times \vec{dP} \wedge \vec{\delta P}$$

como sabemos por la (97) página 57

$$(62) \qquad \text{rot } \overrightarrow{V} \times \overrightarrow{dP} \wedge \overrightarrow{\delta P} = \sum_{1\,u}^{3} \left[(\vec{\imath}_u \times \overrightarrow{dP}) \left(\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial x_u} \times \overrightarrow{\delta P} \right) - \right.$$

$$\left. - (\vec{\imath}_u \wedge \overrightarrow{\delta P}) \left(\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial x_u} \times \overrightarrow{dP} \right) \right]$$

pero como

$$(63) \qquad \vec{\imath}_u \times \overrightarrow{dP} = dx_u \qquad \vec{\imath}_u \times \overrightarrow{\delta P} = \delta x_u$$

$$\text{por} \qquad u = 1,2,3$$

y además

$$\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial x_u} dx_u = d\overrightarrow{V}$$

se deduce

$$(64) \qquad \text{rot } \overrightarrow{V} \times \overrightarrow{dP} \wedge \overrightarrow{\delta P} = d\overrightarrow{V} \times \overrightarrow{\delta P} - \delta\overrightarrow{V} \times \overrightarrow{dP}$$

ecuación muy importante

11. Circulación de un vector aplicado.—Se denomina circulación de un vector aplicado $(P, \overrightarrow{V})$ al valor de la integral curvilínea

$$\int_c \vec{V} \times d\vec{P}$$

cuando el punto P recorre un arco de longitud $P_0 P_1$.

Sea un arco de curva s recorrido por el punto variable P de manera que el vector $\vec{V} = \vec{V}(P)$ cuyo punto asociado es P cuyo recorrido según la tangente estará expresado por $d\vec{P} = \vec{\tau} \cdot ds$, la circulación elemental estará dada por

$$dT = \vec{V} \times d\vec{P} \tag{65}$$

y la total por

$$T = \int_c \vec{V} \times d\vec{P} = \int_e \vec{\Phi} \times \vec{\tau} V ds = \int_c V \cos\theta \, ds \tag{66}$$

representando por $V_t = V \cos\theta$ el valor algebraico de la componente del vector segun la tangente, será

$$T = \int_c V_t \, ds \tag{67}$$

12. Flujo de un vector aplicado.—Se denomina *flujo* de un vector aplicado $(P, \vec{V})$ al valor algebraico de la integral

$$\int_{\sigma} \vec{V} \times \vec{\eta}\, d\sigma$$

que expresa la componente normal del vector a travez de una área finita.

En efeclo sea σ una porción de superficie limitada por una curva cualquiera, P un punto de σ, fijaremos sobre la normal PN un sentido positivo, siendo $\vec{\eta}$ el versor de la normal orientada.

Sea $\vec{V} = \vec{V}(P)$ el vector y $d\sigma$ un elemento diferencial de área σ que comprende al punto P, el flujo elemental estará expresado por

$$dF = \vec{V} \times \vec{\eta}\, d\sigma \tag{68}$$

y el flujo total por

$$F = \int_{\sigma} \vec{V} \times \vec{\eta}\, d\sigma = \int_{\sigma} \vec{\Phi} \times \vec{\eta}\, V\, d\sigma = \int_{\sigma} V \cos\varphi\, d\sigma \tag{69}$$

pero $V_n = V \cos\varphi$ es el valor algebraico de la componente del vector según la normal a la superficie, entonces se tendrá:

$$F = \int_{\sigma} V_n\, d\sigma \tag{70}$$

Esta integral estará afectada del signo positivo o negativo segun sea el sentido de la normal, denominando a estos flujos entrante o saliente o bien interior o exterior según que el versor $\vec{\eta}$ esté orientado en sentido interno o externo.

13. Expresión cartesiana de la circulación de un vector.—El vector $\overrightarrow{V}$ esta expresado por

$$\overrightarrow{V} = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u X_u \qquad \text{y el} \qquad \overrightarrow{dP} = \overrightarrow{\tau}\, ds$$

reemplazando en la (66) se tiene

$$T = \int_c \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u X_u \times \overrightarrow{\tau}\, ds \tag{71}$$

como

$$\bar{\imath}_u \times \overrightarrow{\tau} = \cos \alpha_u$$

cosenos directores de la tangente, se deduce que

$$T = \int_c \sum_{1\,u}^{3} X_u\, dx_u \tag{72}$$

14. Expresión cartesiana del flujo de un vector.—Reemplazando en la (69)

$$\overrightarrow{V} = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u X_u$$

se obtiene

(73) $$F = \int_{\sigma} \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u X_u \times \vec{\eta}\, d\sigma$$

como $\bar{\imath}_u \times \vec{\eta}$ expresa los cosenos directores de la normal a la superficie será

$$\bar{\imath}_u \times \vec{\eta} = \cos \beta_u$$

entonces las áreas proyectadas serán; para un flujo exterior

(74) $$dx_i\, dx_j = \cos \beta_k\, d\sigma \qquad i \neq j \neq k = 1,2,3$$

y para un flujo interior

(75) $$dx_j\, dx_i = -\cos \beta_k\, d\sigma \qquad i \neq j \neq k = 1,2,3$$

o bien en forma explícita

(76) $$dx_2\, dx_3 = \cos \beta_1\, d\sigma \qquad dx_1\, dx_3 = \cos \beta_2\, d\sigma$$

$$dx_1\, dx_2 = \cos \beta_3\, d\sigma$$

La expresión cartesiana del flujo será:

(77) $$F = \int\int \sum_{1\,u}^{3} X_u\, dx_v\, dx_w \qquad u \neq v \neq w$$

o bien

$$(78) \qquad F = \iint [X_1\, dx_2\, dx_3 + X_2\, dx_3\, dx_1 + X_3\, dx_1\, dx_2]$$

Cuando la curva determinada por el punto asociado al vector es cerrada y se elige un sentido de circulación, es evidente que

$$X_1\, dx_1 = \int \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\, dx_2\, dx_1$$

(79)

$$X_2\, dx_2 = \int \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_2$$

.....
.....

Si β_u son los ángulos que forma la normal a la superficie con los tres ejes coordenados, exterior o interior, las proyecciones del área del triángulo elemental $d\sigma$ serán:

$$\tfrac{1}{2}\, dx_1\, dx_2 = \cos \beta_3\, d\sigma \qquad \tfrac{1}{2}\, dx_1\, dx_3 = \cos \beta_2\, d\sigma \qquad \tfrac{1}{2}\, dx_2\, dx_3 = \cos \beta_1\, d\sigma$$

(80)

$$\tfrac{1}{2}\, dx_2\, dx_1 = -\cos \beta_3\, d\sigma \qquad \tfrac{1}{2}\, dx_3\, dx_1 = -\cos \beta_2\, d\sigma$$

$$\tfrac{1}{2}\, dx_3\, dx_2 = -\cos \beta_1\, d\sigma$$

entonces

$$X_1\,dx_1 = -\int \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\cos\beta_3\,d\sigma$$

(81)

$$X_2\,dx_2 = \int \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\cos\beta_3\,d\sigma$$

Sumándolas se obtiene

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 = 2\int\left[\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right]\cos\beta_3\,d\sigma$$

análogamente se tiene

$$X_1\,dx_1 + X_3\,dx_3 = 2\int\left[\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right]\cos\beta_2\,d\sigma$$

(82)

$$X_2\,dx_2 + X_3\,dx_3 = 2\int\left[\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right]\cos\beta_1\,d\sigma$$

Sumándolas se deduce

$$\sum_{1\,u}^{3} X_u dx_u = \sum_{1\,u}^{3} X_u \cos \alpha_u \, ds = \int \left[\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \right) \cos \beta_1 + \right.$$

(83)

$$\left. + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \right) \cos \beta_2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right) \cos \beta_3 \right] d\sigma$$

o simplemente representado por

(84) $$\Gamma_k = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \qquad i \neq j \neq k = 1,2,3$$

se tendrá

(85) $$\int_c \sum_{1\,u}^{3} X_u \cos \alpha_u \, ds = \int\int_{\sigma} \sum_{1\,u}^{3} \Gamma_u \cos \beta_u \, d\sigma$$

o bien abreviadamente

(86) $$\int_c \sum_{1\,u}^{3} X_u \cos \alpha_u \, ds = \int_{\sigma} \sum_{1\,u}^{3} \Gamma_u \cos \beta_u \, d\sigma$$

de la que inmediatamente se deduce:

(87) $$\int_c \vec{V} \times \vec{dP} = \int_{\sigma} \Gamma \, . \, d\sigma$$

es el *teorema de Stokes*

o bien como

$$\bar{\imath}_u \times \vec{\tau} = \cos \alpha_u \qquad \bar{\imath}_u \times \vec{\eta} = \cos \beta_u$$

$$(88) \qquad \int_c \vec{V} \times \vec{dP} = \int_\sigma \vec{\eta} \times \vec{\Gamma}\, d\sigma = \int_\sigma \vec{\eta} \times \operatorname{rot} \vec{V}\, d\sigma$$

que es la *fórmula de Stokes*

Si consideramos una superficie cerrada, la evidencia de las expresiones

$$(89) \qquad X_u = \int \frac{\partial X_u}{\partial x_u}\, dx_u \qquad u = 1,2,3$$

nos conduce por la sustitución en la (77) a obtener la integral del volúmen

$$(90) \qquad F = \int\int\int \sum_{1}^{3} u \frac{\partial X_u}{\partial x_u}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

siendo el volúmen elemental $dv = dx_1\, dx_2\, dx_3$, se puede escribir la anterior asi:

$$(91) \qquad F = \int_v \sum_{1}^{3} u \frac{\partial X_u}{\partial x_u}\, dv$$

Igualando con la (73), se tiene

$$\int_{v} \sum_{1u}^{3} \frac{\partial X_u}{\partial x_u}\, dv = \int_{\sigma} \sum_{1u}^{3} X_u \cos \beta_u \, d\sigma \tag{92}$$

Es el *teorema de Gauss* que puede escribirse también así:

$$\int_{c} \operatorname{div} \vec{V} . dv = \int_{\sigma} \vec{\eta} \times \vec{V} \, d\sigma \tag{93}$$

15. Las tres fórmulas fundamentales.—Sea σ una superficie cerrada que limita un volúmen v, sea $\vec{\eta}$ el versor normal en un punto cualquiera P hacia el exterior de v. Sea U un escalar $\vec{V}$ un vector función del punta variable P.

Las tres fórmulas fundamentales que son de una gran importancia en la Mecánica y en la Física que transforman las integrales triples en dobles se deduce del modo siguiente.

1°. La ecuación (93)

$$\int_{v} \operatorname{div} \vec{V} \, dv = \int_{\sigma} \vec{\eta} \times \vec{V} \, d\sigma \tag{94}$$

nos dice: La integral de la divergencia de un vector extendida a un volúmen, es igual al flujo del expresado vector, sobre la superficie que limita el volúmen (Teorema de Ostrogradski).

2°. Si el vector $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{a}\, U$ siendo $\overrightarrow{a}$ un vector constante y U un número cualquiera función del punto P, reemplazando en la fórmula de la divergencia (21) teniendo presente que

$$\text{(95)} \qquad \operatorname{div} \overrightarrow{V} = \operatorname{div} (\overrightarrow{a}\, U) = \sum_{1\,u}^{3} \vec{\imath}_u \times \frac{\partial (\overrightarrow{a}\, U)}{\partial x_u} =$$

$$= \overrightarrow{a} \times \sum_{1\,u}^{3} \vec{\imath}_u \frac{\partial U}{\partial x_u} = \overrightarrow{a} \times \operatorname{grad} U$$

entonces se tiene

$$\text{(97)} \qquad \overrightarrow{a} \times \int_{v} \operatorname{grad} U\, dv = \overrightarrow{a} \times \int_{\sigma} \overrightarrow{\eta}\, U\, d\sigma$$

o bien

$$\text{(97)} \qquad \int_{c} \operatorname{grad} U\, dv = \int_{\sigma} \overrightarrow{\eta}\, U\, d\sigma$$

3°. Si el vector $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{a}$ siendo $\overrightarrow{a}$ un vector constante y $\overrightarrow{W}$ un vector cualquiera, como sabemos

$$\text{(98)} \qquad \operatorname{div} (\overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a} \times \operatorname{rot} \overrightarrow{W}$$

cambiando $\overrightarrow{W}$ por $\overrightarrow{V}$

(99) $$\operatorname{div}(\overline{\overrightarrow{V}} \wedge \overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a} \times \operatorname{rot} \overline{\overrightarrow{V}}$$

reemplazando en la (94) se tiene

(100) $$\overrightarrow{a} \times \int_v \operatorname{rot} \overline{\overrightarrow{V}}\, dv = \int_\sigma \overrightarrow{\eta} \times \overline{\overrightarrow{V}} \wedge \overrightarrow{a}\, d\sigma =$$

$$= \overrightarrow{a} \times \int_\sigma \overrightarrow{\eta} \wedge \overline{\overrightarrow{V}}\, d\sigma$$

o bien

(101) $$\int_c \operatorname{rot} \overline{\overrightarrow{V}}\, dv = \int_\sigma \overrightarrow{\eta} \wedge \overline{\overrightarrow{V}}\, d\sigma$$

16. Teorema de Green.—Sabemos (a) que

(102) $$\operatorname{div}(U . \overline{\overrightarrow{V}}) = U \operatorname{div} \overline{\overrightarrow{V}} + \operatorname{grad} U \times \overline{\overrightarrow{V}}$$

haciendo $\overline{\overrightarrow{V}} = \operatorname{grad} W$ entonces se tendrá

(103) $$\operatorname{div}(U . \operatorname{grad} W) = U \operatorname{div} . \operatorname{grad} W + \operatorname{grad} U \times \operatorname{grad} W$$

permutando U con W se tiene

(104) $\quad \text{div}\,(W.\,\text{grad}\,U) = W.\,\text{div grad}\,U + \text{grad}\,W.\,\text{grad}\,U$

ahora como sabemos (b)

$$\triangle_2 U = \text{div grad}\,U$$

(105)

$$\triangle_2 W = \text{div grad}\,W$$

sustituyendo en las anteriores y restándolas se obtiene

(106) $\quad \text{div}\,(U\ \text{grad}\,W) - \text{div}\,(W\ \text{grad}\,U) =$

$$= U.\,\text{div grad}\,W - W.\,\text{div grad}\,U = U.\,\triangle_2 W - W.\,\triangle_2 U$$

El *teorema de Gauss*, como sabemos es

(107) $$\int_v \text{div}\,\vec{V}\,dv = \int_\sigma \vec{\eta} \times \vec{V}\,d\sigma$$

además se tiene

(108) $$\int_v \text{div}\,(U\ \text{gran}\,W)\,dv = \int_\sigma \vec{\eta} \times U\ \text{grad}\,W\ d\sigma$$

como

$$\text{grad } W = \vec{\eta} \frac{dW}{dn}$$

$$(109) \qquad \int_{\sigma} U \vec{\eta} \times \vec{\eta} \frac{dW}{dn} \, d\sigma = \int_{\sigma} U \frac{dW}{dn} \, d\sigma = \int_{v} U \triangle_2 W \, dv$$

análogamente:

$$\int_{\sigma} W \frac{dU}{dn} \, d\sigma = \int_{v} W \triangle_2 U \, dv$$

sumándolas se obtiene

$$(110) \qquad \int_{\sigma} \left\{ U \frac{dW}{dn} - W \frac{dU}{dn} \right\} d\sigma = \int_{v} (U \triangle_2 W - W \triangle_2 U) dv$$

que es el *teorema de Green o primera fórmula de Green.*

Suponiendo $W = U$ se tendrá

$$(111) \qquad \text{div } (U \text{ grad } U) = U \text{ div grad } U + (\text{grad } U)^2$$

del mismo modo que antes

$$(112) \qquad \int_{\sigma} U \frac{dU}{dn} \, d\sigma = \int_{v} (\text{grad } U)^2 \, dv + \int_{v} U \triangle_2 U \, dv$$

que es la *segunda fórmula de Green.*

CAPITULO CUARTO

CINEMATICA

§ 1 Preliminares.—Tiempo.— Punto móvil.—Velocidad.—Aceleración.

1. La Mecánica Racional es la ciencia que estudia los fenómenos del movimiento y del equilibrio. Todas las propiedades del movimiento, que dependan exclusivamente de las nociones del espacio y del tiempo, caracterizan una *propiedad cinemática* y la doctrina que las analiza, las colecta y las reune en una teoría lógica, es precisamente la Cinemática.

La Cinemática estudia, pues, el movimiento en sí mismo, prescisdiendo de toda causa que lo produzca.

La etimología de Cinemática viene de la palabra griega que significa movimiento.

Ampére fué el primero que trató esta rama de la ciencia, a mediados del siglo pasado.

2. Sistema invariable o rígido.—Es un conjunto de puntos geométricos, en el cual las distancias mutuas no cambian con el tiempo, (conservando la orientación de la figura).

3 División del estudio atendiendo a los sistemas invariables.—1°. Estudia el movimiento simplemente de un punto geométrico.

2°.—Estudia el movimiento del sistema geométrico de puntos (sistema invariable o rígido).

4 Trayectoria.—Es el lugar geométrico de las diversas posiciones del punto móvil en el espacio.

5 División del estudio atendiendo a la trayectoria.—1°. *Movimiento rectilíneo.*—Cuando la trayectoria es una línea recta.

2°. *Movimiento curvilíneo.*—Cuando la trayectoria es una línea curva. Se clasifican según la forma de la curva: circular, elíptico, hiperbólico, parabólico, cicloidal, helicoidal, etc.

6 Ley del movimiento.—Es la función del espacio con relación al tiempo que indica el modo como el punto o el sistema de puntos recorren su trayectoria.

7 División del estudio atendiendo a la ley del movimiento.—1°. *Movimiento uniforme.*—Cuando el punto móvil o el sistema de puntos recorre en tiempos iguales espacios iguales.

2°. *Movimiento variado.*—Cuando el punto móvil o sistema de puntos recorre en tiempos iguales espacios desiguales.

Si la variación del movimiento es uniforme, el movimiento se denomina uniformemente variado.

8 Punto o sistema de referencia.—Para conocer si un punto o sistema de puntos se mueven, es necesario conocer si el punto móvil se acerca o se aleja de un punto elegido inicial (punto de referencia), o bien si dicho punto móvil o sistema de puntos móviles referido a un sistema de referencia, definido por un sistema cartesiano o polar, varían las coordenadas.

Lo anterior se hace necesario, porque es evidente que si sólo existiese un punto o sistema de puntos (invariable) en el universo, no sabríamos si está o no en movimiento por falta de un punto o sistema de referencia.

9 División del estudio atendiendo al punto o sistema de referencia.—1°. *Movimiento absoluto.*—Cuando el punto de referencia o el sistema de referencia si se considera en reposo.

2°. *Movimiento relativo.*—Cuando el punto o sistema de referencia se mueve a la vez que el punto móvil o sistema móvil.

3°. *Movimiento de arrastre.*—Es el movimiento del punto o del sistema de referencia.

10. División de los movimientos de los sistemas invariables.—1°. La división puede referirse a los movimientos finitos a los movimientos elementales, a los movimientos simultáneos y a los movimientos de contacto.

2°. Considerando los movimientos mas sencillos, éstos pueden tratarse como límites de todos los demás, lo mismo que se ejecuta con los movimientos de un punto, en que el curvilíneo se divide en dos o tres rectilíneos y el movimiento variado como compuesto de infinidad de movimientos uniformes.

11. Movimientos finitos de los sistemas.—1°. Si todos los puntos tienen la misma ley del movimiento y las trayectorias paralelas, se llama movimiento de traslación.

2°. Si dos puntos no se mueven, los demás tienen por trayectorias circunferencias y el movimiento se llama de rotación.

12. Movimientos elementales de los sistemas.—1°. Son los de traslación y rotación separados o reunidos, en este último caso se llama el movimiento elemental helicoidal.

2°. Cualquiera que sea el movimiento del sistema puede considerarse como un movimiento continuo compuesto de movimientos elementales.

13. Movimientos simultáneos de los sistemas.—1°. Asi como un punto, que tiene movimiento relativo, conocido el movimiento de arrastre del punto o sistema de referencia, se busca el movimiento absoluto del punto; del mismo modo en los sistemas invariables conociendo los movimientos elementales relativo y de arrastre se determina el absoluto.

2°. Estos movimientos elementales simultáneos son de traslación, rotación y helicoidal.

3°. También un movimiento elemental puede descomponerse en varias elementales simultáneos.

14 Movimiento de contacto de los sistemas.—1°. Pueden ambos sistemas moverse, pero puede reducirse uno de ellos al reposo por un movimiento contrario común.

2°. Si un sistema está en reposo, el otro tiene movimiento de rodadura, si ambos contactos cambian; o de deslizamiento si solo un contacto cambia.

3°. Se reducen pues a movimientos de rotación y de traslación.

15. Distinción entre la Geometría y la Cinemátca.—1°. Ambas ciencias consideran a los sistemas geométricos en movimiento pero la Geometria prescinde del tiempo que dura el movimiento y la Cinemática la toma en consideración.

16. Tiempo.—Es una relación en la existencia sucesiva de los fenómenos. Cuando una bomba cae de un avión no lo hace instantáneamente, comparando las fases sucesivas de la caída obtenemos la idea del tiempo.

El tiempo como el espacio es una idea simple que no se puede definir, pero que todos comprendemos, no se hace necesario poder definir el tiempo para poder estudiar la Mecánica, así como no fué indispensable definir el espacio para desarrollar la Geometría, bastará pues precisar su naturaleza como magnitud física para poderla medir.

17. Tiempos iguales.—Son los que dan cabida a fenómenos idénticos que se unifican en circunstancias semejantes.

Si dos bombas iguales compuestas de la misma materia se dejan caer de una misma altura suponiendo el aire en las mismas condiciones, los tiempos que emplean en llegar a la tierra serán iguales.

18. Medida del tiempo.—El tiempo se mide en: eras, siglos, años, meses, semanas, días, horas, minutos y segundos. (*)

Era es el intervalo de tiempo que empieza a contarse desde un acontecimiento notable y que abarca un tiempo muy grande, pudiendo comprender varios siglos. *Siglo*, es el intervalo de tiempo que comprende cien años. *Año Trópico* es el tiempo que emplea la Tierra en moverse alrededor del Sol contado a partir de un punto de su órbita hasta que vuelve a dicho punto (Vernal). Su valor me dio es de 365 días, 5 horas, 48 minutos, 46 segundos.

Día Solar verdadero, es el tiempo que emplea el Sol en volver al meridiano del mismo lugar en su movimiento diurno.

Mes Sinódico.—Que debe su orígen al movimiento de la Luna alrededor de la Tierra es de 29 d., 12 h., 44 m., 3 s., desde una Luna nueva hasta otro novilunio. Los meses civiles de enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre tienen 31 días, abril, junio, setiembre y noviembre tienen 30 días, febrero 28 días y cada cua-

---

(*) Corresponde al curso de Astronomía hacer la distinción y profundizar la noción de la medida del tiempo.

tro años 29 días. Un año tiene 52 semanas y un día; cada semana tiene 7 días y debe su origen a los Cuartos de la Luna y sus nombres se derivan de los planetas, de la Luna y del Sol.

Hora, Es la veinticuatro ava parte de un día; tiene 60 minutos. El *Minuto* tiene 60 segundos. Para medir las horas, minutos y segundos se usaban en la antigüedad relojes de arena y de agua, (clepsidras) y desde el siglo XIV se comenzaron a usar ya los relojes regulados por las oscilaciones de péndulos. En la práctica se mide el tiempo con relojes que dan el tiempo solar medio, siendo la unidad el segundo de dicho tiempo solar medio o sea:

$$\frac{1}{24 \times 60 \times 60} = \frac{1}{86400}$$

que se determina por observaciones astronómicas.

Las sensaciones que uno recibe aparecen como ordenadas con el criterio de *antes, simultáneamente, después.*

En la Fisica clásica y por consiguiente en la Mecánica, se dice que dos fenómenos son simultáneos cuando se verifican a la vez para un mismo observador y tambien para cualquier otro independientemente del sistema de referencia en que se encuentran situados los observadores, siempre que existiesen señales que se propagaran instantáneamente, tendría esta hipótesis sentido físico.

El tiempo posee un caracter absoluto contrariando así al concepto que tenemos del espacio.

El universo en que se producen estos fenómenos es tridimensional.

En la Física y Mecánica moderna, el tiempo como el espacio poseen el caracter de relatividad, es decir, que dos fenómenos cualesquiera que se verificaran simultaneamente ó no, según los sistemas de referencia en que se encuentran situados los observadores.

El observador referido a un sistema de referencia supuesto en reposo, medirá un tiempo distinto del observador referido a un sistema de referencia en movimiento.

El universo donde se producen estos fenómenos será cuatrodimensional o universo de Minkowski.

19. Unidad de tiempo.—La unidad de tiempo elegida en Mecánica es el segundo, pudiéndose usar tambien el minuto y la hora en las aplicaciones. En la Física Teórica también se usa el año de luz.

Se expresa así: la luz recorre 75,000 leguas por segundo o 300,000 kilómetros por segundo, o 3.10^{10} centímetros por segundo. La Tierra en su órbita recorre 7 y ½ leguas por segundo o 30 kilómetros por segundo. La Tierra alrededor de su eje para un punto del Ecuador recorre 460 metros por segundo. La Luna recorre en su órbita 1 kilómetro por segundo y el sonido recorre 340 metros por segundo.

El radio inicial del universo según la teoría de Eddington, se deduce que es de 1.068 millones años de luz.

20. Representación geométrica del tiempo.—Sobre una recta tomada como eje (eje de los tiempos) se adopta una longitud que represente la unidad de tiempo elegida, en el sistema ordinario el segundo y se tomarán segmentos proporcionales al número de segundos.

21. Punto móvil.—Es el punto cuya posición varía con el tiempo y se expresa en general por:

$$P = P(t) \tag{1}$$

ley que indica la variabilidad del punto en el espacio.

Si consideramos ahora que el punto P se refiere a una terna $O\,x_1x_2x_3$ la ecuación geométrica anterior equivale a las tres ecuaciones analíticas o escalares:

$$x_u = x_u(t) \qquad \text{por } u = 1,2,3 \tag{2}$$

Si suponemos fijada de antemano la trayectoria del punto P que sea la curva S, para determinar el movimiento del punto P bastará asignar además la *ecuación horaria*

$$s = s(t) \tag{3}$$

s representa una abscisa curvilínea que podemos contarla a partir de una cierta posición $P(t_0)$ considerada como origen de los tiempos, s será en general una función cualquiera del tiempo y en especial puede ser

$$\frac{s}{t - t_0} = cte = V$$

la ecuación horaria tomará la forma particular de

$$s = V(t - t_0)$$

en la cual la asbcisa curvilínea será una una función lineal del tiempo.

El movimiento caracterizado por la ecuación anterior se denomina movimiento uniforme, la constante V que es la relación entre el espacio s recorrido y el intervalo de tiempo empleado en recorrer dicho espacio o sea el espacio recorrido en la unidad de tiempo define la *velocidad* en el movimiento uniforme.

Ahora si en especial se tiene.

$$\frac{V}{t - t_0} = cte = j$$

entonces la ecuación horaria tomará la forma particular

(5) $$V = j(t - t_0)$$

en la cual la velocidad horaria será una función líneal del tiempo.

El movimiento caracterizado por la ecuación anterior (5) se denomina *movimiento uniformemente variado.* La constante j es la

velocidad de la velocidad o sea el crecimiento o decrecimiento de la velocidad en la unidad de tiempo que define la *aceleración* en el movimiento uniformemente variado.

22. Ley del movimiento.—Es la función que expresa el espacio en relación con el tiempo (ecuación horaria).

23. Línea de los espacios.—Es la línea representativa de la ley del movimiento.

$$s = s\,(t)$$

Para construír la línea de los espacios, conociendo la trayectoria, considerando en general que el orígen de los tiempos P_0 sea distinto al orígen de los espacios O y una serie de posiciones del punto móvil $P_1\, P_2\, P_3 \cdots$ como P_0 está distante del punto O, la longitud OP_0 quiere decir que cuando el móvil ya ha recorrido el espacio lineal $OP_0 = s_0$ comenzaremos a contar el tiempo a las posiciones $P_1, P_2, P_3, \cdots$ corresponden los tiempos $t_1, t_2, t_3, \cdots$ y los espacios $s_1, s_2. s_3, \cdots$

Eligiendo un sistema de ejes rectangulares, uno eje de los tiempos y el otro de los espacios, y, escalas convenientes para representar los tiempos y los espacios, observaremos que cuando $t = 0$;

$$s = s_0 \text{ por } t = t_1\,;\; s = s_1 \cdots \text{ etc.}$$

determinaremos así una serie de puntos en el plano de los ejes que unidos por un trazo contínuo se obtiene la línea de los espacios.

Lo contrario si se tiene construída la línea de los espacios podremos conocer en distintos tiempos las distancias del punto de referencia al punto móvil.

Los puntos máximos representan los mayores alejamientos del móvil respecto al punto de referencia en el sentido positivo y negativo, Los puntos en que corta al eje de los tiempos corresponden al paso del punto móvil por el punto de referencia.

Observación.—Las escalas para los tiempos y los espacios en general son distintos, pero como caso particular pueden ser las

mismas, y solamente en este caso será posible pasar a la derivada de la función.

24. Velocidad.—La idea de velocidad nace siempre que una magnitud varía con el tiempo.

La velocidad expresa la variación que experimenta una magnitud geométrica en la unidad de tiempo.

25. Velocidad escalar.—Es el valor de la velocidad según la misma trayectoria. Si s representa la abcisa curvilínea determinada por el recorrido del punto móvil P sobre la trayectoria, dicha longitud del arco de trayectoria estará dada por la ecuación horaria

$$s = s(t)$$

que define la *ley del movimiento.*

La velocidad escalar del movimiento uniforme que puede reemplazar al movimiento variado en el intervalo de tiempo $\triangle t$ será:

$$V_m = \frac{\triangle s}{\triangle t} \tag{6}$$

que define la velocidad escalar media del movimiento variado en el intervalo de tiempo $\triangle t$; es decir la velocidad escalar que tiene un móvil ficticio que recorre con movimiento uniforme en el mismo intervalo de tiempo que el móvil real recorre el elemento $\triangle s$ de trayectoria con movimiento variado.

Pasando al límite se obtendrá la velocidad escalar en un instante dado

$$V = \frac{ds}{dt} = s'(t). \tag{7}$$

26. Velocidad vectorial—*Es el vector aplicado cuyo módulo es la velocidad escalar.*

La ecuación del movimiento del punto P está expresada por

$$P = P(t)$$

la velocidad vectorial media estará expresada por:

(8) $$\vec{V}_m = \frac{\vec{\triangle P}}{\triangle t}$$

pero $$\vec{\triangle P} = \vec{\tau}_m . \triangle s$$ entonces

(9) $$\vec{V}_m = \vec{\tau}_m . \frac{\triangle s}{\triangle t}$$

En el límite

(10) $$\vec{V} = \vec{\tau} . \frac{ds}{dt} = \vec{\tau} . V$$

expresa la velocidad vectorial en un instante dado, es un vector aplicado en P y se simboliza por $(P, \vec{V})$, su dirección es la de la tangente a la trayectoria y su sentido el del movimiento.

27. Clasificación de las velocidades.—Se clasifican en velocidad lineal, angular, areolar según sea la magnitud, determinándose una linea, un ángulo y una área. Anteriormente ha quedado expresada la velocidad lineal. Ahora tratamos las otras dos.

28. Velocidad angular.—Sea el ángulo θ función del tiempo t la ecuación horaria angular:

$$\theta = \theta(t) \tag{11}$$

Análogamente a lo expresado anteriormente la velocidad angular escalar en un instante dado será:

$$w = \frac{d\theta}{dt} \tag{12}$$

El vector velocidad angular estará definido por:

$$\vec{w} = \vec{b}\, w \tag{13}$$

29. Relación entre las velocidades lineal y angular.—El punto variable con el tiempo sobre la trayectoria s esta expresada por la función

$$P = P(t)$$

la velocidad

$$\frac{\vec{dP}}{dt} = \frac{\vec{dP}}{ds}\,\frac{ds}{dt} \tag{14}$$

o bien

$$\vec{V} = \vec{\tau}.V$$

Haciendo centro en un punto O con el radio vector r describiremos un arco de circunferencia que corta al radio vector infinita-

mente próximo en el punto N, dicho arco elemental ds_1 estará dado por:

$$ds_1 = r d\theta$$

en el triángulo infinitesimal PNP_1 rectángulo en N, se tiene

$$ds_1 = ds . \operatorname{sen} \beta$$

igualando se deduce:

$$ds \operatorname{sen} \beta = r d\theta$$

y dividiendo por dt

$$V \operatorname{sen} \beta = r w \tag{15}$$

que relaciona la velocidad escalar lineal con la velocidad escalar angular.

La velocidad vectorial (vector velocidad) esta definida por

$$\vec{\tau}\, V \operatorname{sen} \beta = \vec{\tau}\, r w \tag{16}$$

o bien

$$\vec{V} \operatorname{sen} \beta = \vec{\tau} . w r$$

multiplicando vectorialmente por el versor según el radio vector r

$$\vec{\Phi} \wedge \vec{\tau} = \vec{b} \operatorname{sen} \beta \tag{17}$$

se tendrá:

$$\vec{\Phi} \wedge \vec{V} \operatorname{sen} \beta = \vec{b} \operatorname{sen} \beta \, w \, r$$

(18) $$\vec{\Phi} \wedge \vec{V} = \vec{b} \, w \, r = \vec{w} \, r$$

30 Velocidad areolar.—Si el área A es función del tiempo, la ecuación horaria areolar será:

(19) $$A = A(t)$$

La velocidad escalar areolar en un instante dado será:

(20) $$W = \frac{dA}{dt}$$

El vector velocidad areolar estará definido por:

(21) $$\vec{W} = \vec{b} \, W$$

Sabemos que

(22) $$dA = \tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

Considerando el área proyectada en el plano x_1, x_2, podremos escribir.

(23) $$\frac{dA_3}{dt} = \tfrac{1}{2} w r^2_3$$

Multiplicando por el versor $\vec{b}$ se tendrá:

$$\vec{W}_3 = \tfrac{1}{2}\, w\, \vec{r}^{\,2}_3 \tag{24}$$

Pasando a coordenadas cartesianas

$$r_3^2 = \sum_{1\,u}^{2} x_u^2 \qquad d\theta_3 = x_1 dx_2 - x_2 dx_1$$

el área elemental será:

$$dA_3 = \tfrac{1}{2}\,(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$$

y la velocidad areolar

$$W_3 = \tfrac{1}{2}\left(x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt} \right) \tag{23'}$$

o bien

$$W_3 = \tfrac{1}{2}\,(x_1 v_{x2} - x_2 v_{x1}) \tag{24'}$$

Los vectores

$$P_3 - O = \sum_{1\,u}^{2} \vec{\imath}_u\, x_u$$

$$\frac{dP_3}{dt} = \sum_{1\,u}^{2} \vec{\imath}_u \frac{dx_u}{dt}$$

tiene por producto vectorial

$$(25) \qquad \overrightarrow{W_3} = \tfrac{1}{2}\,(P_3 - O) \wedge \frac{\overrightarrow{dP_3}}{dt} = \tfrac{1}{2}\,\vec{\imath}_3 \left| x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt} \right|$$

análogamente

$$\overrightarrow{W_2} = \tfrac{1}{2}\,\vec{\imath}_2 \left| x_3 \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dx_3}{dt} \right|$$

$$\overrightarrow{W_1} = \tfrac{1}{2}\,\vec{\imath}_1 \left| x_2 \frac{dx_3}{dt} - x_3 \frac{dx_2}{dt} \right|$$

Sumándolas se tiene el vector

$$(26) \qquad \overrightarrow{W} = \tfrac{1}{2} \sum^{3} \vec{\imath}_u \left| x_v \frac{dx_u}{dt} - x_w \frac{dx_v}{dt} \right|$$

$$u \neq v \neq w = 1,2,3$$

$$(27) \qquad \overrightarrow{W} = \tfrac{1}{2} \sum^{3} \vec{\imath}_u W_u$$

13. Caracter intrinseco de la velocidad.—Para conocer el movimiento de un punto P eligiremos un ente de referencia, una terna $Ox_1x_2x_3$. Si se elige además otra terna $O_1y_1y_2y_3$ fija respecto de la primera; las ecuaciones cartesianas $x_u = x_u(t)$ por $u = 1,2,3$ cambian pero la velocidad vectorial no varía, del mismo modo co-

mo no varía ni la forma geométrica de la trayectoria ni la ley temporal del movimiento.

Sean $\bar{\imath}_u$ por $u = 1,3,3$ los versores fundamentales de la terna $O\,x_1x_2x_3$ y $x_u = x_u(t)$, las coordenadas de P en el instante t respecto a esta terna, asi tendremos:

$$P = O + \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u\, x_u$$

Como la otra terna es fija respecto a la anterior, la velocidad vectorial se obtiene diferenciando con respecto al tiempo la anterior

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u \frac{dx_u}{dt}$$

las componentes serán:

$$\frac{dx_u}{dt} = \bar{\imath}_u \times \vec{V} = V_{xu} \qquad u = 1,2\,3 \tag{28}$$

Para la terna fija $O_1y_1y_2y_3$ será

$$P = O_1 + \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u\, y_u$$

y

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u \frac{dy_u}{dt} \tag{29}$$

Obsérvese que las componentes de la velocidad vectorial

$$\frac{dx_u}{dt} \text{ y } \frac{dy_u}{dt} \qquad \text{por} \quad u = 1,2,3$$

son para ambas ternas las mismas, podremos decir que las componentes de la velocidad vectorial son indiferentes a las coordenadas del punto *P*.

32. Línea de las velocidades.—1°. Se determina la línea de los espacios tomando en ella el mayor número de puntos y encontrando para cada uno la velocidad en un instante dado, por un incremento igual a la unidad de tiempo el incremento que corresponde al punto de la tangente a la línea de los espacios será la velocidad en un instante dado.

2°. Los puntos de inflexión dan los puntos máximos de la línea de las velocidades.

33. Medida de la velocidad.—1°. Cuando se quiere medir una magnitud se la compara con otra de su misma especie que se llama unidad y el resultado de la comparación da origen al número que mide dicha magnitud.

2°. Sea s la magnitud que se desea medir, la comparamos con u_s de su especie, el resultado de la comparación da el número n_s que la mide, es decir se tendrá:

$$s = u_s n_s$$

3°. Como u_s ha sido elegido arbitrariamente podremos ahora elegir u'_s como unidad lo que da lugar al número n'_s luego

$$s = u'_s n'_s$$

igualando

$$u_s n_s = u'_s n'_s$$

de donde se deduce la expresión que permite conocer el valor numerico de la maguitud por el cambio de unidad.

4°. Del mismo modo consideremos que se mide el tiempo tomando como unidades $u_t\, u'_t$ se tendrá:

$$u_t\, n_t = u'_t\, n'_t$$

5°. La velocidad como es el cuociente de dos medidas, una de espacio y otra de tiempo, será un número abstracto que para definirla será necesario expresar las unidades de espacio y de tiempo elegidas.

6°. Representemos por v la velocidad en el sistema de unidades u_s, u_t y v', la velocidad en el sistema de unidades u'_s, u'_t, como:

$$\frac{v'}{v} = \frac{n'_s \times n_t}{n_s \times n'_t} = \frac{u_s \times u'_t}{u'_s \times u_t}$$

de donde

$$v' = \frac{u_s \times u'_t}{u'_s \times u_t} \cdot v$$

34. Hodografa.—Es la trayectoria determinada por los extremos de los segmentos orientados equipolentes a los que individualizan a los vectores velocidad que corresponden a cada una de las posiciones del punto móvil P en la trayectoria, eligiendo como origen común de dichos segmentos orientados, uno de los ∞^3 puntos del espacio. Si elegimos uno de los ∞^3 puntos del espacio podremos construir considerando dicho punto B como origen, los segmentos orientados equipolentes a los que individualizan a los vectores velocidad en cada uno de las puntos de la trayectoria, los extremos Q de estos segmentos orientados definen un segundo punto móvil

$$Q = Q(t)$$

ley que indica la variabilidad del punto en esta segunda trayecto-

ria (hodrografa) estando determinada la posición de Q por la coordenada vectorial (vector velocidad)

$$Q - B = \overline{V}$$

de donde

$$Q = B + \overline{V} \tag{30}$$

35. Aceleración.—La idea de aceleración nace siempre que la velocidad varíe con el tiempo. El vector aceleración expresa la variación que experimenta el vector velocidad en la unidad de tiempo.

Suponiendo fijada la trayectoria del punto O, que sea la curva H podremos determinar el movimiento de Q, en efecto diferenciando con respecto al tiempo la (30) se tiene:

$$\overline{J} = \frac{d\overline{Q}}{dt} = \frac{d\overline{V}}{dt} \tag{31}$$

que define el vector aceleración que corresponde a la posición Q del punto móvil. El módulo del vector $\overline{J}$ que representaremos por J es la aceleración total, así:

$$\overline{J} = \overline{U}.J \tag{32}$$

Este vector estará asociado al punto Q quedando simbolizado por $(Q, \overline{J})$ será tangente en Q a la hodografa y su sentido está indicado por el sentido del movimiento de Q en la hodografa.

36. Componentes tangencial y centrípeta del vector aceleración.— El vector velocidad como sabemos está expresado por:

(33) $$\vec{V} = \vec{\tau} . V$$

diferenciándola con respecto al tiempo se tiene:

(34) $$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{\tau} \frac{dV}{dt} + \frac{d\vec{\tau}}{dt} . V$$

que también puede ser escrita así:

(35) $$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{\tau} . \frac{dV}{dt} + \frac{d\vec{\tau}}{ds} . V^2$$

pero

(36) $$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \frac{d\vec{\tau}}{d\alpha} = \frac{\vec{n}}{\rho}$$

siendo el versor $\vec{n}$ perpendicular al versor $\vec{\tau}$, luego la fórmula (35) define el vector aceleración total en función de las componentes

(37) $$J_t = \frac{dV}{dt}$$

tangencial y

(38) $$J_c = \frac{V^2}{\rho}$$

centrípeta, entonces

$$\vec{J} = \vec{\tau} \cdot J_t + \vec{n} \cdot J_c \tag{39}$$

Elevándola al cuadrado se tendrá el tensor

$$J^2 = J_t^2 + J_c^2 \tag{40}$$

Componentes cartesianas del vector aceleración total.—Refiriendo el movimiento a un ente $Ox_1x_2x_3$ terna rectangular de versores fundamentales $\vec{\imath}_u$ por $u = 1,2,3$, se deducen inmediatamente las componentes según los ejes x_1, x_2, x_3

$$J_{ux} = \vec{\imath}_u \times \vec{J} = \vec{\imath}_u \times \vec{\tau}\, J_t + \vec{\imath}_u \times \vec{n}\, J_c \tag{41}$$

$$u = 1,2,3$$

o bien

$$J_{xu} = \vec{\imath}_u \times \vec{U} \cdot J = J \cos \alpha_u \tag{42}$$

Ahora como

$$\vec{V} = \frac{\vec{dP}}{dt}$$

es evidente que

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{P}}{d^2t} \tag{43}$$

Siendo O el origen de la terna

$$P = O + \sum_{1}^{3} \vec{\imath}_u x_u \tag{44}$$

diferenciando dos veces respecto del tiempo

$$\vec{J} = \frac{d^2\vec{P}}{dt^2} = \sum_{1}^{3} \vec{\imath}_u \frac{d^2x_u}{dt^2} \tag{45}$$

luego las componentes según los ejes serán

$$\frac{d^2x_u}{dt^2} = \vec{\imath}_u \times \vec{J} = J_{xu} \qquad u = 1,2,3 \tag{46}$$

38. Clasificación de los movimientos por la fórmula de la aceleración total.—Sabemos (40) que

$$J^2 = \left[\frac{dV}{dt}\right]^2 + \left[\frac{V^2}{\rho}\right]^2 \tag{47}$$

1°. Si ρ es variable la trayectoria es curva en el caso particular que ρ sea constante la trayectoria es circular y si $\rho = \infty$ la trayectoria es recta.

2°. Si V es variable el movimiento será variado, en el caso particular que V sea constante el movimiento es uniforme y si la aceleración tangencial es constante o bien si la velocidad es una función lineal del tiempo el movimiento será uniformemente variado.

39. Línea de las aceleraciones.—Se determina por la línea de las velocidades tomando en ella el mayor número de puntos y encontrando para cada punto la velocidad escalar, estos valores son los que determinan las ordenadas, la aceleración escalar tangencial, en un instante dado se obtiene incrementando en la unidad de tiempo, el incremento que corresponde al punto de la tangente a la línea de las velocidades será la aceleración tangencial en un instante dado.

40. Movimiento uniforme.—Es cuando el punto móvil en tiempos iguales recorre espacios iguales.

Está caracterizado como sabemos por ser la aceleración tangencial $J_t = 0$ ó la velocidad escalar $V = cte.$

41. Ley del movimiento.—La ecuación diferencial del movimiente uniforme es

$$\frac{ds}{dt} = V = cte$$

la integral general nos da la ecuación horaria

$$s = Vt + c$$

que define la ley del movimiento uniforme.

La constante c depende de las condiciones iniciales, es decir, es de la misma naturaleza del espacio s por un valor particular del tiempo t, se general si por $t = 0$, $s = s_0$, se tendrá:

(48) $$s = s_0 + Vt$$

s_0 es el espacio inicial. Cuando el origen de los espacios y de los tiempos es el mismo $s_0 = 0$

(49) $$s = V t$$

42. Representación gráfica del movimiento uniforme.—La ecuación horaria (48) nos permite observar que la línea de los espacios (ley del movimiento) es una recta que en general corta a los ejes t y s. La línea de las velocidades es una recta paralela al eje t, y la línea de las aceleraciones tangenciales es una recta que se confunde con el eje t.

43. Movimiento uniformemente variado.—Es cuando en tiempos iguales la velocidad del punto móvil crece o decrece proporcionalmente al tiempo.

El movimiento será *acelerado* cuando la velocidad crece y *retardado* cuando decrece.

Está caracterizado por la aceleración tangencial

$$J_t = cte$$

44. Ley del movimiento.—La ecuación del movimiento uniformemente variado es

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = J_t = cte$$

la primera integral general será:

(50) $$V = J_t t + C$$

que por $t = 0$ sea $V = V_0$ velocidad inicial

(51) $$\frac{ds}{dt} = V = V_0 + J_t\, t$$

si en el origen de los tiempos el punto móvil esta en reposo $V_0 = 0$ entonces

(52) $$V = J_t\, t$$

Volviendo por segunda vez a integrar la ecuación (51) se tiene

(53) $$s = V_0 t + \tfrac{1}{2} J_t\, t^2 + C_1$$

por $t = 0$ sea $s = s_0$ espacio inicial, entonces

(54) $$s = s_0 + V_0 t + \tfrac{1}{2} J_t\, t^2$$

En el caso mas simple que $s_0 = 0$ $V_0 = 0$ las ecuaciones (51) y (54) se reducen a las

(55) $$V = J_t\, t \qquad s = \tfrac{1}{2} J_t\, t^2$$

eliminando el tiempo t se deduce que

$$V^2 = 2\, J_t\, s$$

45. Discusión.—Como el movimiento que estudiamos puede ser unas veces *acelerado* otras *retardado.* Para investigarlo multipliquemos la ecuación (51) por J_t, asi se tendrá:

(57) $$V J_t = (V_0 + J_s t) J_t$$

para que este producto se anule por valores de la variable t es preciso que

$$V = V_0 + J_t t = 0$$

lo que se verifica cuando

(58) $$t = t_1 = -\frac{V_0}{J_t}$$

Si $t < t_1$ el producto será negativo, movimiento retardado, y si $t > t_1$ el producto será positivo, movimiento acelerado.

La discusión completa sería estudiar la variación del trinomio de segundo grado. En efecto consideremos $J_t > 0$ en las ecuaciones (51) y (54) la variable independiente t va siempre creciendo: la velocidad será cero en el instante

$$t_1 = -\frac{V_0}{J_t}$$

mientras que $t < t_1$ la velocidad es negativa s va decreciendo, el punto móvil P se mueve en el sentido negativo; para el valor $t = t_1$ $V = 0$ entonces

(59) $$s_1 = s_0 - \frac{V_0^2}{2J_t}$$

colocándose el punto móvil en la posición P_0 extrema hacia la izquierda, cuando $t > t_1$ la velocidad será positiva, s crece va en el

sentido positivo. De manera que mientras la aceleración $J_t > 0$ y el tiempo varíe de $-\infty$ a $+\infty$, el punto móvil P se mueve desde $-\infty$ a la derecha hasta el punto P_0 al cual llega cuando

$$t = t_1 = -\frac{V_0}{J_t}$$

y retrocede moviendose hacia $+\infty$; en la primera fase del movimiento es *retardado* y en la segunda fase es movimiento *acelerado.*

Ahora elevando al cuadrado la expreción

$$V = V_0 + J_t t$$

se tiene

(60) $$V^2 = V_0^2 + 2J_t(V_0 t + \tfrac{1}{2} J_t t^2)$$

como

$$s - s_0 = V_0 t + \tfrac{1}{2} J_t t^2$$

se obtiene

(61) $$V^2 = V_0^2 + 2J_t(s - s_0)$$

Valores reales de V se tienen cuando:

(62) $$V_0^2 + 2J_t(s - s_0) = V_0^2 + 2J_t s - 2J_t s_0 > 0$$

de la cual se deduce que

$$s > s_0 - \frac{V_0^2}{2 J_t} \qquad \text{ó} \qquad s > s_1$$

lo cual se verifica puesto que s_1 es el menor valor que tóma s, los dos valores de V dados por la ecuación (60) son siempre iguales y de signos contrarios.

En la discusión se ha supuesto $J_t > 0$ lo mismo se hace en en el supuesto que $J_t < 0$.

46. Representación gráfica del movimiento uniformemente variado.— De la ecuación horaria

$$s = s_0 + V_0 t + \tfrac{1}{2} J_t t^2$$

resulta que la línea de los espacios está representada por una parábola, su eje de simetría es paralelo al eje de los espacios presentando la concavidad en el sentido de los espacios positivos o negativos segun que

$$J_t > 0 \qquad \text{ó} \qquad J_t < 0$$

La línea de las velocidades es

$$V = V_0 + J_t t$$

que representa una recta que en general corta a los ejes t y s y la línea de las aceleraciones tangenciales $J_t = cte$ representa una recta paralela al eje de los tiempos t.

47. La velocidad y la aceleración en coordenadas polares.—La expresión del versor en una terna cartesiana ortogonal es

(63) $$\vec{\Phi} = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u \cos \alpha_u$$

las fórmulas de paso a coordenadas polares son

$$(64) \qquad \cos\alpha_1 = \operatorname{sen}\delta\cos\theta;\quad \cos\alpha_2 = \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\theta;\quad \cos\alpha_3 = \cos\delta$$

reemplazando en la (63) se tiene (*)

$$(65) \qquad \overrightarrow{\Phi} = \bar{\imath}_1 \operatorname{sen}\delta\cos\theta + \bar{\imath}_2 \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\theta + \bar{\imath}_3\cos\delta$$

teniendo presente que $\bar{\imath}_2 = i\,\bar{\imath}_1$ siendo $i = \pm\sqrt{-1}$ y el versor

$$(66) \qquad \overrightarrow{\chi} = \bar{\imath}_1 e^{i\theta}$$

la (65) se reduce a la

$$(67) \qquad \overrightarrow{\Phi} = \overrightarrow{\chi}\operatorname{sen}\delta + \bar{\imath}_3\cos\delta$$

Entonces el versor en el universo tridimensional será:

$$(68) \qquad P - O = \overrightarrow{\Phi}\, r$$

siendo r el módulo que es el radio vector

$$(69) \qquad P - O = \left[\overrightarrow{\chi}\operatorname{sen}\delta + \bar{\imath}_3\cos\delta\right] r$$

(*) Godofredo García.—**La velocidad y la aceleración totales en coordenadas absolutas.**—Revista de Ciencias año XXXVIII—1936—Lima-Perú.

48. Velocidad.—Diferenciando la (69) con respecto al tiempo t

$$(70)\quad \frac{d\vec{P}}{dt} - \frac{d\vec{O}}{dt} = \left[\vec{\chi}\,\operatorname{sen}\,\sigma + \vec{\imath}_3\cos\sigma\right]\frac{dr}{dt} + \vec{\imath}\chi\,\operatorname{sen}\,\sigma\, r\frac{d\theta}{dt} + \left[\vec{\chi}\cos\sigma - \vec{\imath}_3\,\operatorname{sen}\,\sigma\right] r\frac{d\sigma}{dt}$$

denominando los nuevos versores que definen las direcciones del paralelo y meridiano.

$$(71)\quad \vec{p} = \vec{\imath}\,\vec{\chi} \qquad \vec{m} = \vec{\chi}\cos\sigma - \vec{\imath}_3\,\operatorname{sen}\,\sigma$$

$$(72)\quad \vec{V} - \vec{V}_0 = \vec{\Phi}\frac{dr}{dt} + \vec{p}\,\operatorname{sen}\,\sigma\, r\frac{d\theta}{dt} + \vec{m}\, r\frac{d\sigma}{dt}$$

o bien

$$(73)\quad \vec{V} - \vec{V}_0 = \vec{\Phi}\,V_r + \vec{p}\,V_p + \vec{m}\,V_m$$

es la expresión del vector velocidad en coordenadas polares. Si la terna de referencia esta animada de un movimiento uniforme $V_0 = cte$ y en reposo $V_0 = 0$ el tensor será:

$$(74)\quad V^2 = \left\{\frac{dr}{dt}\right\}^2 + r^2\,\operatorname{sen}^2\sigma\left\{\frac{d\theta}{dt}\right\}^2 + r^2\left\{\frac{d\sigma}{dt}\right\}^2$$

o bien

$$V^2 = V^2_r + V^2_p + V^2_m \tag{75}$$

49. Aceleración.—Diferenciando la (72) con respecto al tiempo t se obtiene

$$\frac{d^2\vec{P}}{dt^2} - \frac{d^2\vec{O}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} - \frac{d\vec{V}_0}{dt} = \vec{\Phi}\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{d\vec{\Phi}}{dt}\frac{dr}{dt} + \tag{76}$$

$$+ \vec{p}\,\operatorname{sen}\,\delta\,\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \vec{p}\,r\cos\delta\,\frac{d\delta}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \vec{p}\,r\,\operatorname{sen}\,\delta\,\frac{d^2\theta}{dt} +$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}\,r\,\operatorname{sen}\,\delta\,\frac{d\theta}{dt} + \vec{m}\,\frac{dr}{dt}\frac{d\delta}{dt} + \vec{m}\,r\,\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{d\vec{m}}{dt}\,r\,\frac{d\delta}{dt}$$

teniendo presente que

$$\frac{d\vec{\Phi}}{dt} = \vec{p}\,\operatorname{sen}\,\delta\,\frac{d\theta}{dt} + \vec{m}\,\frac{d\delta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{p}\cos\delta\,\frac{d\theta}{dt} - \vec{\Phi}\,\frac{d\delta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -(\vec{m}\cos\delta + \vec{\Phi}\,\operatorname{sen}\,\delta)\,\frac{d\theta}{dt} \tag{77}$$

reemplazando en la (76) y ordenándola se tiene:

$$(78) \qquad \vec{J} - \vec{J}_0 = \vec{\Phi}\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\,\mathrm{sen}^2\delta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2\right] +$$

$$+ \vec{p}\left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\delta}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\,\mathrm{sen}^2\,\delta\,\frac{d\theta}{dt}\right)\right] +$$

$$+ \vec{m}\left[\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\,\frac{d\delta}{dt}\right) - r\,\mathrm{sen}\,\delta\,\cos\delta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

o bien

$$(79) \qquad \vec{J} - \vec{J}_0 = \vec{\Phi}\,J_r + \vec{p}\,J_p + \vec{m}\,J_m$$

es la expresión del vector aceleración en coordenadas polares. Si la terna de referencia está animada de un movimiento uniforme o en reposo $J_0 = 0$ entonces

$$(80) \qquad \vec{J} = \vec{\Phi}\,J_r + \vec{p}\,J_p + \vec{m}\,J_m$$

el tensor será:

$$(81) \qquad J^2 = J^2_r + J^2_p + J^2_m$$

50. Movimiento plano.—Haciendo $\delta = \frac{\pi}{2}$ la (78) se reduce a la

$$(82) \qquad \vec{J} - \vec{J}_0 = \vec{\chi}\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \vec{p}\left[\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\,\frac{d\theta}{dt}\right)\right]$$

$$(83) \qquad \vec{J} - \vec{J}_0 = \vec{\chi}\,J_r + \vec{p}\,J_p$$

§ 2.—Movimientos periodicos.

51. Movimiento periodico.—Es cuando el punto móvil recorre un número indefinido de veces la misma trayectoria y en intervalos de tiempos iguales se encuenta en una misma posición y con la misma velocidad (vector velocidad).

El intervalo de tiempo igual se determina el *período.*

Como consecuencia de lo anterior, se deduce que en un movimiento períodico la trayectoria es una línea cerrada. Hay infinidad de movimientos períodicos, variedad originada por la forma que tenga la trayectoria cerrada que describe el punto móvil o por la ley del movimiento.

52. Ley del movimiento periodico.—La ley de un movimiento cualquiera como ya sabemos esta dada por la función horaria

$$s = s(t)$$

para el caso del movimiento períodico la variable t se llama *períodica*; cuando incrementando la variable t en el período T la función no cambia de valor, es decir que podremos escribir:

(84) $$s\,(t + n\,T) = s\,(t)$$

siendo n un número entero y positivo.

Las derivadas serán

(85) $$s'\,(t + n\,T) = s'\,(t)$$

Tratándose en particular de un movimiento circular uniforme, la ley de este movimiento esta dada por la ecuación horaria.

(86) $$s = s_0 + V\,t$$

en la cual es

(87) $$V = w\,a$$

w es la velocidad angular y a el radio entonces se tendrá

(88) $$s = s_6 + w\,a\,t$$

El vector aceleración centrípeta será:

(89) $$\vec{J_c} = \vec{n} \cdot \frac{V^2}{a} = \vec{n}\,\frac{w^2 a^2}{a} = \vec{n}\,w^2\,a$$

siendo $\vec{n}\,a = O - P$ luego

(90) $$\overrightarrow{J_c} = w^2 (O - P)$$

Como la aceleración escalar es

(91) $$J_c = w^2 a$$

En el intervalo de tiempo $t = T$ el punto P ocupa la misma posición, es decir que

$$s - s_0 = 2\pi a$$

y la (88) da

$$2\pi = w T$$

de donde

(92) $$T = \frac{2\pi}{w}$$

expresa el *periodo* en el movimiento circular uniforme.

53. Vectores giratorios.—El vector

(93) $$P - O = \overrightarrow{\chi r}$$

siendo $r = cte = a$ estará expresado por

(94) $$P - O = \overrightarrow{\chi a}$$

si el vector gira será $\vec{\chi}$ variable, entonces la velocidad vectorial es

$$\vec{V} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{\chi}}{dt} \cdot a \tag{95}$$

y la aceleración vectorial será:

$$\vec{J} = \frac{d^2\vec{\chi}}{dt^2} \cdot a \tag{96}$$

Sabemos que

$$\vec{\chi} = \bar{\imath}_1 \cos \alpha + \bar{\imath}_2 \operatorname{sen} \alpha \tag{97}$$

siendo $\bar{\imath}_1$, $\bar{\imath}_2$ los versores fundamentales que corresponden a las direcciones de los ejes cartesianos fijos, en general téngase presente que $\alpha = \theta + \theta_0$ si el movimiento del punto P es uniforme o bien que el vector gira con movimiento uniforme entonces $\theta = wt$ se tendrá que $\alpha = wt + \theta_0$ y el versor

$$\vec{\chi} = \bar{\imath} \cos (wt + \theta_0) + \bar{\imath}_2 \operatorname{sen} (wt + \theta_0) \tag{97'}$$

las derivadas serán.

$$\frac{d\vec{\chi}}{dt} = [-\bar{\imath}_1 \operatorname{sen} (wt + \theta_0) + \bar{\imath}_2 \cos (wt + \theta_0)]\, w \tag{98}$$

$$(99) \qquad \frac{d^2\vec{\chi}}{dt^2} = -[\vec{\imath}_1 \cos(w\,t + \theta_0) + \vec{\imath}_2 \operatorname{sen}(w\,t + \theta_0)]\, w^2$$

que tambien pueden ser escritas asi

$$(100) \qquad \vec{\chi} = -\vec{\imath}_1 \operatorname{sen}\left(w\,t + \theta_0 - \frac{\pi}{2}\right) + \vec{\imath}_2 \cos\left(w\,t + \theta_0 - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(101) \qquad \frac{1}{w^2} \cdot \frac{d^2\vec{\chi}}{dt^2} = -\vec{\imath}_1 \operatorname{sen}\left(wt + \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right) + \vec{\imath}_2 \cos\left(wt + \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Comparando con el versor $\frac{1}{w}\,\frac{d\vec{\chi}}{dt}$ nos permite observar que las versores $\vec{\chi}$ y $\frac{1}{w^2}\,\frac{d^2\vec{\chi}}{dt^2}$ con relación al versor $\frac{1}{w}\,\frac{d\vec{\chi}}{dt}$ el versor $\vec{\chi}$ presenta un retardo de $-\frac{\pi}{2}$ y el versor $\frac{1}{w^2}\,\frac{d^2\vec{\chi}}{dt^2}$ presenta un adelanto de $\frac{\pi}{2}$

Lo anterior nos conduce a observar que el vector $P - O$ presenta un retardo de $-\frac{\pi}{2}$ con respecto al vector velocidad $\vec{V}$ y el vector aceleración $\vec{J}$ presenta un adelanto de $\frac{\pi}{2}$ con respecto al vector velocidad $\vec{V}$.

54. Movimiento oscilatorio o armónico.—Consideremos el caso simple en que el punto móvil P describa una trayectoria circular con movimiento uniforme, proyectando las posiciones sucesivas del

punto móvil P sobre uno de los diámetros, la trayectoria descrita por la proyección de P será rectilínea. El movimiento de la proyección de P será *oscilatorio* (fig. 28).

55. Oscilación simple.—Se denomina asi el espacio recorrido en un solo sentido en la proyección.

56. Oscilación doble o completa.—Cuando el espacio recorrido es en los dos sentidos o sea dos oscilaciones simples.

57. Elongación.—Es la distancia de la proyección de P al centro de la circunferencia.

58. Fase.—Es el ángulo que corresponde a la posición P del punto móvil contado a partir del orígen de los tiempos P_0 tal como el ángulo θ, o bien a partir del origen de los espacios tal como $\theta + \theta_0$ el ángulo θ_0 es la fase inicial.

A la fase tambien se le denomina la *anomalía.*

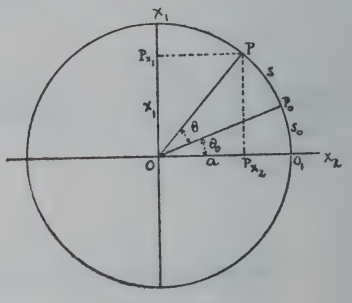


Fig. 28

59. Ley del movimiento oscilatorio o armonico.—Es la relación de la elongación con el tiempo, que en general se expresa por una función

$$x_u = x_u(t) \qquad \text{por } u = 1,2$$

con respecto a cada uno de los ejes y en el caso particular que tratamos, la extructura de las funciones anteriores será determinada multiplicando escalarmente y respectivamente la (94) por los versores $\bar{\imath}_u$ se tendrá:

$$(102) \qquad x_1 = a \cos(\theta + \theta_0) \qquad x_2 = a \operatorname{sen}(\theta + \theta_0)$$

Ahora como en el movimiento circular uniforme es $\theta = w\,t$ según que sea positivo o negativo, P recorrerá en el sentido positivo o negativo luego se tendrá:

(103) $\qquad x_1 = a \cos (w t + \theta_0) \qquad x_2 = a \operatorname{sen} (w t + \theta_0)$

las velocidades serán:

(104) $\qquad V_{x_1} = -a\, w \operatorname{sen} (w t + \theta_0) \qquad V_{x_2} = a\, w \cos (w t + \theta_0)$

o bien por las (103)

(105) $\qquad V_{x_1} = -w x_2 \qquad V_{x_2} = w x_1$

las aceleraciones serán:

(106) $\qquad J_{x_1} = -w^2 x_1 \qquad J_{x_2} = -w^2 x_2$

La misma periodicidad del movimiento circular uniforme se presenta en el caso del movimiento armónico, es decir $T = \frac{2\pi}{w}$, la recíproca $F = \frac{1}{T}$ se denomina la *frecuencia* del movimiento y la velocidad angular $w = \frac{2\pi}{T}$ se denomina *constante de frecuencia o pulzación.* El punto O es el *centro* del movimiento y a la *amplitud.* La *fase* esta dada por $w t + \theta_0$ (anomalía que corresponde a la posición P) siendo θ_0 la *fase inicial.*

Para otro movimiento armónico de igual período será

(107) $\qquad x_1 = a_1 \cos (w t + \theta_1)$

Los movimientos (103) y (107) presentan una diferencia de fase $\theta_0 - \theta_1$ con adelanto o atrazo segun sea el signo.

Como

$$x_2 = a \operatorname{sen} (w t + \theta_0) \tag{108}$$

podremos escribirla así

$$x_2 = a \cos (w t + \theta_0 - \frac{\pi}{2}) \tag{109}$$

estos dos movimientos presentan una diferencia de fase $-\frac{\pi}{2}$ o sea un retardo.

60. Movimiento vibratorio que tiende a extinguirse.—Hemos estudiado el movimiento permanente o sea el que tiene igual período. Ahora pasaremos a estudiar el movimiento vibratorio cuando tiende a extinguirse.

Consideremos el vector $P - O = \vec{\chi}\, r$ que gira con velocidad *angular constante* $w = \frac{\theta}{t}$ alrededor del punto O describiendo el punto P una *espiral logarítmica* siendo O un *punto asintotico*; estudiemos el movimiento del punto P del vector $P - O$.

Es evidente que cualquiera que sea la ley de variación de r con respecto al ángulo θ (anomalía) la velocidad vectorial será:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{\chi}\, \frac{dr}{dt} + \frac{d\vec{\chi}}{dt} r \tag{111}$$

y la aceleración vectorial

$$\vec{J} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{\chi}\, \frac{d^2 r}{dt^2} + 2 \frac{d\vec{\chi}}{dt} \frac{dr}{dt} + \frac{d^2\vec{\chi}}{dt^2} r \tag{112}$$

Estudiaremos el caso especial que se trate de una *espiral logaritmica* entonces la ley de r será:

(113) $$r = A\, e^{-Ba}$$

Sabemos que esta curva goza de la propiedad que á valores de la anomalía a en progresión aritmética de diferencia constante corresponden valores del radio vector r en progresión geométrica, de manera que (fig. 29)

(114) $$a_1 - a = \triangle a \qquad \text{constante}$$

(115) $$\frac{r_1}{r} = e^{-B\triangle a} \qquad \text{constante}$$

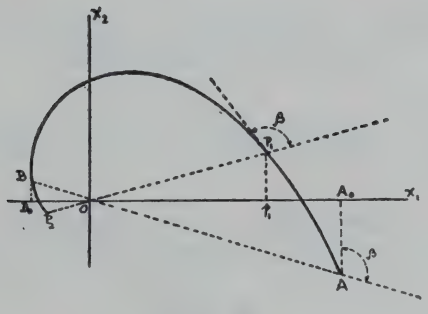


Fig. 29

cuando

$$\triangle a = 2\pi$$

(116) $$\frac{r_1}{r} = e^{-2\pi B} = e^{-\frac{2\pi C}{w}}$$

teniendo en cuenta la ecuación $\alpha = wt + \theta_0$ al intervalo constante $\triangle t$ debe corresponder el ángulo constante $\triangle \alpha$, lo que es evidente, la ecuación $\triangle \alpha = w \triangle t$ nos hace ver que siendo $\triangle \alpha$ constante y w tambien sera $\triangle t$ constante

(117) $$\frac{r_1}{r} = e^{-C \triangle t}$$

Volviendo a la ecuación (113) en la cual A y B son números positivos y e la base de los logaritmos neperianos. Consideremos además que el sentido de la anomalía θ sea creciente es decir $\omega > 0$, siendo θ_0 la anomalía inicial o sea la determinada cuando $t = 0$ y $r = r_0$

En el presente caso el vector

(118) $$P - O = \vec{\chi} A e^{-B\alpha}$$

si $$\alpha = \theta + \theta_0 = \omega t + \theta_0$$

haciendo

(119) $$B\omega = C \qquad r_0 = A e^{-\theta_0}$$

se tendrá

(120) $$P - O = \vec{\chi} r_0 e^{-Ct}$$

es decir que siendo $r = r_0 e^{-Ct}$ las derivadas

(121) $$\frac{dr}{dt} = -Cr_0 e^{-Ct}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = C^2 r e^{-Ct} \tag{122}$$

Reemplazando en las (111) y (112) las extructuras de $\vec{\chi}$ y de sus derivadas asi como r y sus derivadas y teniendo presente que

$$a = \omega t + \theta_0$$

$$\vec{V} = -r_0 e^{-Ct} [\vec{\imath}_1 (C \cos a + \omega \operatorname{sen} a) + \vec{\imath}_2 (C \operatorname{sen} a - \omega \cos a)]$$

(123)

$$\vec{J} = r_0 e^{-Ct} [\vec{\imath}_1 (C^2 \cos a - 2C\omega \operatorname{sen} a + \omega^2 \cos a) +$$

$$+ \vec{\imath}_2 (-C^2 \operatorname{sen} a - 2C\omega \cos a + \omega^2 \operatorname{sen} a)]$$

los tensores o cuadrado de los vectores serán

$$V^2 = (C^2 + \omega^2) \sum_{1}^{2} {}_u x^2_u = (C^2 + \omega^2) r^2$$

(124)

$$J^2 = (C^2 + \omega^2)^2 \sum_{1}^{2} {}_u x^2_u = (C^2 + \omega^2)^2 r^2$$

Estas últimas nos permiten observar que tanto la velocidad como la aceleración del punto P dependen del radio vector $r = r_0 e^{-Ct}$ en particular cuando $t \to \infty$ tambien $r \to \infty$,

Los cosenos directores del vector $P - O$ serán productos escalares

$$(114) \qquad \hat{\imath}_1 \times \overrightarrow{\chi} = \cos \gamma_1 \qquad \hat{\imath}_2 \times \overrightarrow{\chi} = \operatorname{sen} \gamma_1$$

y los cosenos directores del vector velocidad en P serán:

$$(126) \qquad \hat{\imath}_1 \times \overrightarrow{\tau} = \cos \lambda_1 \qquad \hat{\imath}_2 \times \overrightarrow{\tau} = \operatorname{sen} \lambda_1$$

$$(127) \qquad \overrightarrow{\chi} \times \overrightarrow{\tau} = \cos \beta = \cos \gamma_1 \cos \lambda_1 + \operatorname{sen} \gamma_1 \operatorname{sen} \lambda_1$$

o bien

$$(128) \qquad \cos \beta = \frac{\sum_{1u}^{2} x_u V_{xu}}{r^2 \sqrt{C + \omega^2}}$$

y por las (133)

$$(129) \qquad \cos \beta = - \frac{C}{\sqrt{C^2 + \omega^2}}$$

luego

$$(130) \qquad \operatorname{tang} \beta = - \frac{\omega}{C}$$

la que nos permite observar que el ángulo β es constante e independiente del tiempo, propiedad de la de espiral logarítmica de en-

contrar bajo el ángulo constante la recta que pasa por el punto asintotico *O*.

Multiplicando escalarmente por los versores fundamentales respectivamente las (120) y (123) se tendran las

(131) $$x_1 = r_0 e^{-Ct} \cos \alpha \qquad x_2 = r_0 e^{-Ct} \operatorname{sen} \alpha$$

$$V_{x_1} = - r_0 e^{-Ct} \left[C \cos \alpha + \omega \operatorname{sen} \alpha \right]$$

(132)

$$V_{x_2} = - r_0 e^{-Ct} \left[C \operatorname{sen} \alpha - \omega \cos \alpha \right]$$

o simplemente

(133) $$V_{x_1} = - C x_1 - \omega x_2 \qquad V_{x_2} = - C x_2 + \omega x_1$$

$$J_{x_1} = r_0 e^{-Ct} \left[C^2 \cos \alpha + 2C \omega \operatorname{sen} \alpha + \omega^2 \cos \alpha \right]$$

(134)

$$J_{x_2} = r_0 e^{-Ct} \left[- C^2 \operatorname{sen} \alpha - 2C \omega \cos \alpha + \omega^2 \operatorname{sen} \alpha \right]$$

o bien

$$J_{x_1} = - C V_{x_1} - \omega V_{x_2} = (C^2 - \omega^2) x_1 + 2C \omega x_2$$

(135)

$$J_{x_2} = - C V_{x_2} + \omega V_{x_1} = (C^2 - \omega^2) x_2 - 2C \omega x_1$$

61. Movimiento helicoidal uniforme.—Consideremos el movimiento compuesto de un movimiento circular y uniforme según una dirección plana y de un movimiento rectilíneo y uniforme según la normal a la dirección plana.

Ya sabemos que la ley del movimiento circular uniforme (periódico) está expresada en las proyecciones sobre dos diámetros perpendiculares por (siendo $\theta = wt$)

$$(136) \qquad x_1 = r \cos (wt + \theta_0) \qquad x_2 = r \operatorname{sen} (wt + \theta_0)$$

cuando por $t = 0$ sea $\theta = 0^0$

$$(137) \qquad x_1 = r \cos wt \qquad x_2 = r \operatorname{sen} wt$$

y la ley del movimiento rectilíneo y uniforme es

$$(138) \qquad x_3 = \pm V t$$

el signo + o el — corresponderá al sentido fijado como positivo en el eje x_3. Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones (137) se tendrá

$$(139) \qquad \sum_{1}^{2} {}_{u} x^2_u = r^2$$

nos explica que el punto P se mueve sobre una superficie cilíndrica de eje x_3 y radio r

La velocidad del punto P se deduce derivando las (137)

$$(141)\qquad \frac{dx_1}{dt} = -rw \operatorname{sen} wt = -wx_2 \qquad \frac{dx_2}{dt} = wr \cos wt = wx_1$$

$$(142)\qquad \frac{dx_3}{dt} = \pm V$$

de las que se obtiene

$$(143)\qquad W = \sqrt{\sum_{1\,i}^{3} \left\{\frac{dx_i}{dt}\right\}^2} = \sqrt{r^2w^2 + V^2}$$

que es constante, luego el movimiento compuesto es también uniforme.

Los cosenos directores del vector $\overline{V}$ serán

$$(144)\qquad \cos \alpha_u = \frac{V_{xu}}{W} \qquad \text{por} \quad u = 1,2,3$$

el tercero será

$$(145)\qquad \cos \alpha_3 = \frac{V_{xu}}{W} = \pm \frac{V}{\sqrt{r^2w^2 + V^2}}$$

que es constante, es decir, que la velocidad (vector velocidad) que es tangente a la trayectoria forma el mismo ángulo con el eje x_3 siendo el ángulo constante.

$$(146)\qquad \alpha_3 = \operatorname{arc} \cos \pm \frac{V}{\sqrt{r^2 w^2 + V^2}}$$

La aceleración se obtiene derivando las (141)

$$(147)\quad \frac{d^2x_1}{dt^2} = -rw^2\cos wt = -w^2x_1\,;\quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = rw^2\,\text{sen}\,wt = -w^2x_2$$

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} = 0$$

Elevándolas al cuadrado y sumándolas se tiene

$$(148)\qquad J^2 = w^4\sum_{1}^{3}\left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}\right\}^2 = w^4r^2$$

o bien

$$(149)\qquad J = w^2r$$

Como sabemos el periodo está expresado por

$$(150)\qquad T = \frac{2\pi}{w}$$

cuando $t = T$ $x_3 = p$ siendo p el paso de la hélice

$$(151)\qquad p = \pm\frac{2\pi V}{w}$$

Proyectando el punto P sobre la dirección plana $x_1 x_2$ se tiene el punto P_1 y sobre el eje x_3 el punto P_2 de manera que será (fig. 30)

(152) $$P - O = (P_1 - O) + (P_2 - O)$$

o bien

(153) $$P - O = \vec{\chi} r + i_3 x_3$$

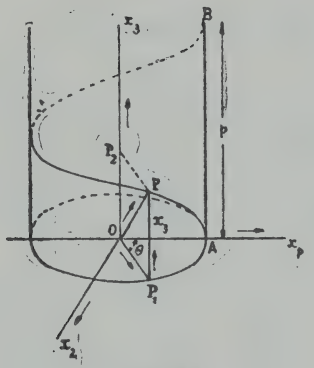


Fig. 20

el vector velocidad está expresado por

(154) $$\vec{V} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt}$$

o

(155) $$\vec{V} = \vec{\chi} \frac{dr}{dt} + \frac{d\vec{\chi}}{dt} r + i_3 \frac{dx_3}{dt}$$

Como sabemos ya (pág. 192 - 48)

$$\vec{V} = \vec{\chi}\frac{dr}{dt} + \vec{p}\,r\frac{d\theta}{dt} + \bar{\imath}_3\frac{dx_3}{dt} \tag{156}$$

como

$$\frac{dx_3}{dt} = V_{x_3} = cte \qquad \text{y} \qquad \frac{d\bar{\imath}_3}{dt} = 0$$

el vector aceleración estará dado por la

$$\vec{J} = \frac{\vec{d^2P}}{dt^2} = \vec{\chi}\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \tag{157}$$

$$+ \vec{p}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]$$

puesto que

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} = 0$$

luego

$$\vec{J}_{x_3} = \bar{\imath}_3 \cdot \frac{d^2x_3}{dt^2} = 0 \tag{158}$$

CAPITULO QUINTO

§ 1.—Sistema invariable o rígido.

1. Un sistema invariable o rígido esta definido por un número finito o infinito de puntos cuyas distancias mutuas no se alteran en el movimiento que tengan en el sistema, para el caso que sea infinito el número de puntos, estos pueden estar distribuidos con continuidad según una línea, superficie o región espacial.

Si en un sistema rígido se conoce la posición de tres de sus puntos no alineados estará completamente determinada la posición de otro de sus puntos.

En efecto sea un sistema rígido S y A_u por $u = 1,2,3$ tres de sus puntos cualesquiera que no estén en línea recta. Si P es otro punto del sistema que no esté en el plano determinado por los tres anteriores, el tetraedro $A_1A_2A_3P$ durante el movimiento será siempre congruente asi mismo porque los cuatro puntos deben permanecer inalterables, asi como sus distancias mutuas. Sean B_u, $u = 1,2,3$ las posiciones de A_u en un determinado instante la posición de P_1 estará ligada a la condición de formar con B_u un triedro superponible con el $A_1A_2A_3$P , siendo las posiciones P y P_1 unívocamente determinadas.

Para individualizar una posición de sistema S bastará indícar la posición de tres de sus puntos cualesquiera.

2. La condición característica de rigidez para dos puntos P y P_1 de un sistema dotado de un movimiento rígido, es que el vector $P_1 - P = \Phi r$ tenga mod $(P_1 - P) = r = cte$ o bien

$$(1) \qquad (P_1 - P)^2 = cte$$

o bien, la derivada será:

$$(2) \qquad (P_1 - P) \times \left(\frac{\overrightarrow{dP_1}}{dt} - \frac{\overrightarrow{dP}}{dt} \right) = 0$$

que determina una ulterior condición característica de rigidez.

La ecuación anterior también podremos escribirla en la forma siguiente:

$$(3) \qquad (P_1 - P) \times \frac{\overrightarrow{dP_1}}{dt} = (P_1 - P) \times \frac{\overrightarrow{dP}}{dt}$$

y como antes

$$P_1 - P = \overrightarrow{\Phi r}$$

se tendrá:

$$(4) \qquad \overrightarrow{\Phi} \times \frac{\overrightarrow{dP_1}}{dt} = \overrightarrow{\Phi} \times \frac{\overrightarrow{dP}}{dt}$$

que definen las componentes de las velocidades vectoriales de P_1 y P respectivamente según $\overrightarrow{\Phi}$ o sea según la recta PP_1 por consiguiente podemos enunciar la proposición siguiente:

En un movimiento rígido la velocidad de dos cualesquiera de sus puntos del sistema móvil tienen igual componente según la recta que los une.

La proposición recíproca está basada en la igualdad (1) y la (4) cuando el movimiento correspondiente es rígido. De manera que la propiedad también se puede enunciar en esta otra forma: en un movimiento rígido la diferencia de las velocidades de dos puntos genéricos es ortogonal a la recta que une a estos dos puntos.

3. Representación cartesiana de los puntos y de los vectores en un sistema rígido.—Consideremos una terna definida $Ox_1 x_2 x_3$ por los versores fundamentales $\bar{\imath}_u$ por $u = 1,2,3$ y otra terna que esté invariablemente unida al sistema rígido S tal como la $O_1 y_1 y_2 y_3$ se deduce que la primera terna es *fija* y que la segunda es *solidaria* al sistema S.

Sea P un punto cualquiera del sistema S o bien de la terna $O_1 y_1 y_2 y_3$ respecto a la cual las coordenadas son invariables, es decir, independientes del tiempo. La posición de P respecto a la terna solídaria $O_1 y_1 y_2 y_3$ está determinada por la

$$P = O_1 + \sum_{1}^{3} \bar{\jmath}_u \, y_u \tag{5}$$

siendo $\bar{\jmath}_u$ los versores fundamentales de la terna $O_1 y_1 y_2 y_3$ funciones del tiempo respecto a la terna $Ox_1 x_2 x_3$ que hemos considerado fija y las coordenadas y_u serán constantes.

Las posiciones de P respecto a la terna fija $Ox_1 x_2 x_3$ esta determinada por la

$$P = O + \sum_{1}^{3} \bar{\imath}_u \, x_u \tag{6}$$

en la cual $\bar{\imath}_u$ son constantes y x_u variables.

La posición de O_1 respecto de O está determinada por la

$$O_1 = O + \sum_{1}^{3} \bar{\imath}_u \, a_u \tag{7}$$

Ahora como

$$(P - O) = (O_1 - O) + (P - O_1) \tag{8}$$

o bien

(9) $$\sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u x_u = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u a_u + \sum_{1\,u}^{3} \bar{\jmath}_u y_u$$

Multiplicando escalarmente por $\bar{\imath}_u$ por $u = 1,2,3$ se obtendrán las fórmulas.

(10) $$x_v = a_v + \sum_{1\,u}^{3} y_u \cos \alpha_{uv} \qquad v = 1,2,3$$

Estas serán las *ecuaciones generales del movimiento* de un sistema invariable (rígido).

Como los versores

$$\bar{\imath}_v = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\jmath}_u \cos \alpha_{uv} \qquad \text{por } v = 123$$

se deducen estas otras dos fórmulas que permiten con las (10) resolver los problemas.

Multiplicando escalarmente por $\bar{\imath}_u$ se tiene:

$$\sum_{1\,u}^{3} \cos^2 \alpha_{uv} = 1$$

(11) por $v = 1,2,3$

y $$\sum_{1\,u}^{3} \cos \alpha_{uv} \cos \beta_{uv} = 0$$

4. **Movimiento de traslación.**—Se denomina movimiento de traslación cuando en el sistema invariable (rígido) se verifica que el vector definido por dos puntos en movimiento cualquiera $P_1 - P = \overrightarrow{V}$ se conserva constante en longitud, dirección y sentido o bien cuando los versores fundamentales de la terna de referencia $\bar{\imath}_u$ por $u = 1,2,3$ son constantes, es decir que la terna se conserva paralela a si misma en todas las posiciones que ocupa en el espacio.

La ecuación geométrica

(12) $$(P_1 - P) = (P_1 - O) - (P - O)$$

y las

(13) $$P_1 - P = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u \, x_u^r$$

(14) $$P_1 - O = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u \, x_u \qquad P - O = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u \, x_u^a$$

fácilmente se deducen las

(15) $$x^r{}_u = x_u - x^a{}_u \qquad \text{por} \quad u = 1,2,3$$

siendo $$x^a{}_u = x^a{}_u(t)$$

Consideremos dos puntos P_u por $u = 1.2$

(16) $$P_u = O_1 + \vec{\Phi}_u \, r \qquad u = 1.2$$

r es la distancia entre los puntos, restando se tiene

(17) $$P_2 - P_1 = (\vec{\Phi}_2 - \vec{\Phi}_1)\, r = \vec{\tau}\, r$$

multiplicando escalarmente por $P_2 - P_1$

(18) $$(P_2 - P_1) \times (P_2 - P_1) = r^2$$

Como sabemos r es independiente del tiempo, entonces se deduce conforme con la (3)

$$(20) \qquad \vec{\tau} \times \frac{\vec{dP_2}}{dt} = \vec{\tau} \times \frac{\vec{dP_1}}{dt}$$

nos dice: que en un movimiento de traslación las velocidades de dos puntos cualesquiera del sistema móvil tienen igual componente según la recta que los une.

En el movimiento de traslación todos los puntos del sistema tienen en un mismo instante la misma velocidad.

En efecto por la (20) multiplicándola escalarmente por el versor $\vec{\tau}$, se tiene

$$(21) \qquad \frac{\vec{dP_1}}{dt} = \frac{\vec{dP_2}}{dt}$$

es decir que los segmentos orientados que individualizan a los vectores son equivalentes.

En el movimiento de traslación todos los puntos del sistema tienen en un mismo instante la misma aceleración:

$$(22) \qquad \frac{\vec{d^2P_1}}{dt^2} = \frac{\vec{d^2P_2}}{dt^2}$$

5. Movimiento de rotación.—Se denomina movimiento de rotación cuando en el sistema invariable se verifica que se mantienen fijos todos los puntos de una recta que se denomina eje de rotación. En efecto fijando dos puntos del sistema basta para que los demás que están sobre la recta que los une se mantengan fijos,

porque si no fuese así el sistema dejaría de ser rígido. Todo punto que esté fuera del eje de rotación por la viva realidad del sistema solamente podra moverse describiendo una circunferencia cuyo centro es el pie de la perpendicular bajada del punto sobre el eje y radio sera la longitud de dicha perpendicular. Entonces se deduce que en el movimiento de rotación las trayectorias de los diferentes puntos del sistema son circunferencias cuyo plano es perpendicular al eje de rotación.

6. Teorema de los ángulos de rotación.—En un mismo intervalo de tiempo los diferentes puntos del sistema animado de un movimiento de rotación describen ángulos iguales.

En efecto sean los puntos P y Q del sistema rígido en el intervalo de tiempo $t_1 - t$ ocupan las pasiciones P_1, Q_1 describiendo los ángulos $\widehat{POP_1}$ y $\widehat{QO_1Q_1}$ el punto Q y el eje determinan un plano que corta al plano de la círcunferencia descrita por P según la recta ON paralela a O_1Q del mismo modo se determina ON_1 paralela a O_1Q_1 los ángulos $\widehat{NON_1} = \widehat{QO_1Q_1}$ por tener sus lados paralelos, uniendo P con N y P_1 con N_1 los ángulos $\widehat{PON} = \widehat{P_1ON_1}$, ahora el ángulo $\widehat{PON_1}$ es común, luego se tendra:

$$\widehat{POP_1} = \widehat{QO_1Q_1} \tag{23}$$

lo que nos dice que en un instante dt el ángulo $d\theta$ sera el mismo para cualquier punto del sistema, de manera que la velocidad angular:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{24}$$

será también la misma para todos los puntos del sistema rígido.

7. Vector velocidad angular.—Como en el movimiento de rotación todos los puntos del sistema rígido describen circunferencias

y en un mismo instante todos los ángulos descritos por los diversos puntos son iguales. La velocidad angular en cada instante será la misma, expresada por $\omega = \frac{d\theta}{dt}$; su signo, positivo o negativo indicará el sentido en el que se produce el movimiento rotatorio respecto a un eje orientado cuya dirección la define el versor $\vec{b}$. Ahora la velocidad angular escalar ω y el versor $\vec{b}$ definen el vector velocidad angular $\vec{\omega} = \vec{b}\,\omega$ que tiene la dirección orientada del eje de rotación. Luego el movimiento de rotación quedará representado por el vector $\vec{\omega}$ individualizado sobre el eje de rotación.

El vector $\vec{\omega}$ será generalmente variable en longitud (función del tiempo) pero su dirección será constante, dicho vector $\vec{\omega}$ fijará la dirección plana a la cual es normal (dirección plana de las trayectorias).

Definido el vector $\vec{\omega}$ podremos determinar la velocidad vectorial de un punto cualquiera P del sistema rígido proyectando dicho punto sobre el eje de rotación e, la proyección de P será O, entonces el vector velocidad lineal $\vec{V}$ en el punto P estará dado por la

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge (P - O) \tag{25}$$

esto es, teniendo en cuenta el signo de $\vec{V}$ por lo convenido anteriormente establecido respecto de $\vec{\omega}$.

Puede eliminarse el punto O si se tiene en cuenta que podemos escribir

$$(P - O) = (P - C) + (C - O)$$

siendo C un punto fijo cualquiera en el eje de rotación entonces se observa que

(26) $$\vec{\omega} \wedge (C - O) = 0$$

y la (25) se transforma en

(27) $$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge (P - C)$$

Esta última expresión nos conduce a las

(28) $$\vec{V}_1 = \vec{\omega} \wedge (P_1 - C) \qquad \vec{V}_2 = \vec{\omega} \wedge (P_2 - C)$$

vectores velocidad que corresponden a los puntos P_1 y P_2 del sistema, restándolas se tiene:

(29) $$\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{\omega} \wedge (P_2 - P_1)$$

obsérvese que el producto anterior por definición es perpendicular al vector $P_2 - P_1$, luego multiplicando escalarmente por $P_2 - P_1$, se deduce que

(30) $$(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \times (P_2 - P_1) = 0$$

o bien

(31) $$\vec{V}_2 \times (P_2 - P_1) = \vec{V}_1 \times (P_2 - P_1)$$

esta relación subsiste para las parejas de puntos del sistema, entonces se dice que el movimiento es rígido.

8. Aceleración de un punto del sistema rotante.—La expresión del vector velocidad

$$\vec{V} = \vec{\tau}\, V = \vec{\tau}\, \omega R \qquad \text{y} \qquad \vec{\omega} = \vec{b}\, \omega \tag{32}$$

nos conduce a la

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{b}}{R} \wedge (P - C) \tag{33}$$

versor según la tangente a la trayectoria y como la aceleración tangencial escalar es

$$J_t = \frac{d^2 s}{dt^2} = R \frac{d^2 \theta}{dt^2} = R \frac{d\omega}{dt} \tag{34}$$

Multiplicando la (43) por J_t se tiene

$$\vec{J}_t = \vec{\tau}\, J_t = \vec{b} \cdot \frac{d\omega}{dt} \wedge (P - C) \tag{35}$$

y como

$$\frac{\vec{d\omega}}{dt} = \vec{b}\, \frac{d\omega}{dt}$$

se deduce que

$$\vec{J}_t = \frac{\vec{d\omega}}{dt} \wedge (P - C) \tag{36}$$

es el *vector aceleración tangencial.*

El versor según la normal (radio) (página 124, fórmula (15)) está expresado por

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau}$$

y como anteriormente, fórmula (33), cuando C coincide con O se tendrá:

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \left\{ \frac{\vec{b}}{R} \wedge (P - O) \right\} \tag{37}$$

estamos en el caso (página 56, segunda formula (96)) que inmediatamente da:

$$\vec{n} = -\frac{1}{R}(P - O) \tag{38}$$

Como la aceleración centrípeta escalar es:

$$J_c = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R \tag{39}$$

multiplicando la (38) por J_c se tiene

$$\vec{J_c} = \vec{n} J_c = -\omega^2 (P - C) \tag{40}$$

que es el vector *aceleración centrípeta.*

El vector aceleración total se deduce inmediatamente, siendo:

$$\vec{J} = \frac{\vec{dw}}{dt} \wedge (P - C) - \omega^2 (P - C) \tag{41}$$

Esta fórmula se podría haber obtenido diferenciando con respecto al tiempo la (27) teniendo presente que

$$\vec{J} = \frac{\vec{dV}}{dt}$$

siendo

$$\vec{V} = \frac{\vec{dP}}{dt} = \frac{d(P - C)}{dt}$$

diferenciando con respecto al tiempo la

$$\vec{V} = \vec{w} \wedge (P - C) \tag{42}$$

se tendrá:

$$\vec{J} = \frac{\vec{dw}}{dt} \wedge (P - C) + \vec{w} \wedge \vec{V} \tag{43}$$

Ahora como la (42) puede ser reemplazada por la

$$\vec{V} = \vec{w} \wedge (P - O)$$

conforme ya sabemos

$$\vec{J} = \frac{d\vec{w}}{dt} \wedge (P - C) + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge (P - O)) \tag{44}$$

debido a la fórmula (96), página 56, del doble producto vectorial se tiene que

$$\vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge (P - O)) = -w^2 (P - O) \tag{45}$$

9. Componentes cartesianas del vector velocidad y del vector aceleración en el movimiento de rotación.—Las ecuaciones del movimiento de rotación pueden deducirse en forma simple, considerando que el eje x_3 e y_3 de la terna fija y de la terna móvil ejes de rotación coincidan siendo el origen O común $O \equiv O_1$, consideremos como semiejes positivos x_1 e y_1 las dos semirectas ortogonales a $x_3 \equiv y_3$ que se encuentran respectivamente en dos semiplanos, uno fijo H y el otro móvil H_1. El ángulo que forma el semieje y_1 con el x_1 será $\theta(t)$ y el ángulo que forma el semieje y_1 con el x_2 será $\frac{\pi}{2} + \theta(t)$.

El versor fundamental $\vec{\imath}_3$ será constante siendo sus componentes

$$\cos \alpha_{3,1} = 0 \qquad \cos \alpha_{3,2} = 0 \qquad \cos \alpha_{3,3} = 1$$

los versores $\vec{\imath}_1$ e $\vec{\imath}_2$ tendran por componentes:

$$\cos \alpha_{1,1} = \cos \theta \qquad \cos \alpha_{1,2} = -\operatorname{sen} \theta \qquad \cos \alpha_{1,3} = 0$$

$$\cos \alpha_{2,1} = \operatorname{sen} \theta \qquad \cos \alpha_{2,2} = \cos \theta \qquad \cos \alpha_{2,3} = 0$$

y teniendo presente que en las (10) a_ν por $\nu = 1,2,3$, se considera $a_\nu = 0$, entonces las (10) se reducen a las

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 \cos\theta - y_2 \operatorname{sen}\theta \\
x_2 &= y_1 \operatorname{sen}\theta + y_2 \cos\theta \\
x_3 &= y_3
\end{aligned}
\tag{46}
$$

derivando estas últimas encontraremos las fórmulas escalares equivalentes a la vectorial (42) las componentes del vector velocidad y del vector aceleración, según los ejes fijos serán:

Si el movimiento es uniforme $\theta = \pm wt$, las derivadas de las (46) serán en este caso

$$
\begin{aligned}
&V_{x1} = \mp wx_2 \qquad V_{x2} = \pm wx_1 \qquad V_{x3} = 0 \\
&J_{x1} = -w^2x_1 \qquad J_{x2} = -w^2x_2 \qquad J_{x3} = 0
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Las componentes del vector velocidad y del vector aceleración según los ejes móviles serán:

$$
\begin{aligned}
&V_{y1} = \mp wy_2 \qquad V_{y2} = \pm wy_1 \qquad V_{y3} = 0 \\
&J_{y1} = -w^2y_1 \qquad J_{y2} = -w^2y_2 \qquad J_{y3} = 0
\end{aligned}
\tag{48}
$$

§ 2.—Movimiento Compuesto.

10. Definición.—Consideremos un número cualquiera de movimientos M_u por $u = 1,2,3, \cdots n$ de los cuales puede participar

un sólido S, representaremos por $\overrightarrow{V_u}$ los vectores velocidad que corresponden a los M_u movimientos del sistema rígido S. El vector velocidad que corresponde a un genérico punto P_i por $i = 1,2,3, \cdots m$ del sistema, lo representaremos por $\overrightarrow{V_i}$. Se denomina movimiento compuesto de los movimientos componentes M_u del sistema rígido al movimiento definido por M del sistema S en el cual la velocidad $\overrightarrow{V_i}$ del punto P_i es en cada instante la suma geométrica de las velocidades $\overrightarrow{V_{xu}}$.

Como ejemplo consideremos un solo punto móvil P_i y sus proyecciones sobre los respectivos ejes de una terna ortogonal de referencia cuyos versores fundamentales son $\vec{\imath}_v$ por $v = 1,2,3$. La velocidad vectorial estará dada por

$$\overrightarrow{V_i} = \sum_{1}^{3} {}_v \, \vec{\imath}_v \, V_{xv} \tag{49}$$

es decir que el movimiento del punto P_i se puede considerar como compuesto por los tres movimientos componentes en proyecciones sobre las tres direcciones definidas por el ente: terna ortogonal:

De modo similar se demuestra que el movimiento helicoidal uniforme esta compuesto de un movimiento circular uniforme y de un movimiento rectilíneo uniforme en dirección normal al primero.

Es de observarse que si ios movimientos componentes M_u son rígidos lo será tambien el movimiento compuesto.

Sean ahora P_1 y P_2 dos puntos del sistema móvil $\overrightarrow{V_1}$ y $\overrightarrow{V_2}$ las correspondientes velocidades vectoriales del movimiento compuesto M y $\overrightarrow{V_{1u}}$; $\overrightarrow{V_{2u}}$ los vectores velocidad que corresponden a los genéricos movimientos componentes M_u. Por definición se tiene:

$$\overrightarrow{V_1} = \sum_{1}^{n} {}_u \, \overrightarrow{V_{1u}} \qquad \overrightarrow{V_2} = \sum_{1}^{n} {}_u \, \overrightarrow{V_{2u}} \tag{50}$$

restando miembro a miembro se obtiene

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \sum_{1}^{n} {}_u (\vec{V}_{1u} - \vec{V}_{2u}) \tag{51}$$

Ahora por la hipótesis que los movimientos componentes sean rígidos, resulta que todas las diferencias que aparecen en el segundo miembro representan vectores ortogonales a P_1P_2 (véase fórmula 30).

Cuando tal cosa acontece, lo mismo se realiza con la suma $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$ lo que expresa que el movimiento compuesto es tambien rígido.

Si uno de los movimientos componentes es de traslación el movimiento compuesto deberá ser tambien de traslación. En virtud de esta hipótesis debera tenerse

$$\vec{V}_{1u} = \vec{V}_{2u} \qquad \text{por} \quad u = 1.2,3. \cdots n \tag{52}$$

y por consiguiente

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2$$

Si las traslaciones componentes son uniformes la traslación compuesta tambien lo será.

El movimiento compuesto de varios movimientos de rotación cuando se trata de un sistema rígido no es en general un movimiento de rotación.

Consideremos varios movimientos de rotación M_u por $u = 1,2,3 \cdots n$ alrededor de ejes que pasan todos por el punto fijo C. Sean $\vec{w}_u$ los respectivos vectores velocidad angular, para cada uno de los movimientos componentes tendremos:

$$\vec{V}_u = \vec{w}_u \wedge (P - C) \qquad \text{por} \quad u = 1,2,3, \cdots n \tag{53}$$

sumándolas se obtiene para el vector velocidad en el movimiento compuesto:

$$\vec{V} = \vec{w} \wedge (P - C) \tag{54}$$

En esta fórmula $\vec{w}$ es un vector que en general es variable no solo en longitud sino tambien en dirección, no pudiéndose por lo tanto decir que un movimiento compuesto sea siempre de rotación.

A pesar de tener la fórmula (54) la misma forma que la (27) sin embargo se diferencian en la naturaleza del vector $\vec{w}$.

Son dos casos notables a los que nos conduce la fórmula anterior

1°. Representa un movimiento de rotación cuando los movimientos componentes de rotación se verifican alrededor de un misvo eje (o sea alrededor de ejes paralelos) y si el movimiento es uniforme será $w = cte.$

2°. De la (54) resulta pues de un modo preciso que: El movimiento compuesto de varios movimientos de rotación uniforme alrededor de ejes concurrentes en un punto es tambien movimiento de rotación uniforme alrededor del eje que pasa por el punto.

11. Movimiento rototraslatorio.—Se denomina rototraslatorio un movimiento compuesto de una traslación y de una rotación alrededor de un eje fijo. Sea $\vec{V}_t$ el vector velocidad que caracteriza un movimiento traslatorio, $\vec{w}$ el vector velocidad angular del movimiento rotatorio y C un punto fijo del eje de rotación, la velocidad vectorial de un punto genérico P del sistema móvil animado de un movimiento de rotación será dada por la fórmula

$$V_c = \vec{w} \wedge (P - C) \tag{55}$$

el movimiento compuesto tendrá para un punto cualquiera la velocidad vectorial

$$\vec{V} = \vec{V}_t + \vec{V}_c \tag{56}$$

Insistiremos en hacer notar que los vectores $\vec{V}_t$ y $\vec{w}$ dependen solamente del tiempo y el segundo vector $\vec{w}$ tiene dirección fija.

Sea O un punto rígidamente ligado con el sistema móvil, su velocidad vectorial será

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_t + \vec{w} \wedge (O - C) \tag{57}$$

restando miembro a miembro las (56) y (57) se tendrá

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{w} \wedge (P - O) \tag{58}$$

Esta fórmula tiene la misma extructura de la (56) solamente que en lugar del vector $\vec{V}_t$ interviene el vector $\vec{V}_0$ y en lugar del punto C el O.

El vector $\vec{V}_0$ en cuanto depende solo del tiempo y no del punto P puede interpretarse como velocidad de un movimiento traslatorio del sistema rígido. El vector $\vec{w} \wedge (P - O)$ debido a la movilidad de O puede a la vez interpretarse como velocidad de un movimiento de rotación pero respecto a un sistema de referencia al cual resulta fijo el punto O e invariable la dirección de $\vec{w}$. Un tal sistema por ejemplo puede ser constituido de manera que conserve dirección invariable en el espacio cuyo origen sea O y que esté animado de un movimiento traslatorio de velocidad vectorial $\vec{V}_0$.

En virtud de la (58) aparece como que el movimiento rototraslatorio dado resulta a la vez compuesto de una traslación de velocidad $\vec{V}_0$ y una rotación de velocidad angular $\vec{w}$ alrededor de un eje

que pasa por el punto O en una dirección fija en el espacio y animado de un movimiento traslatorio de velocidad $\vec{V}_0$, este eje se denomina ahora *eje de rotación.*

El movimiento tal como lo hemos considerado anteriormente (58) se denomina *rototraslatorio impropio* y el definido por la (56) se denomina *rototraslatorio propio.*

La denominación *impropio* es explicada porque ella admite infinidad de descomposiciones, tambien se dice: *transformación impropia* esto debido a la arbitrariedad en la elección del punto O.

Recíprocamente si la velocidad de un punto genérico P de un sistema móvil está definida por (58) donde $\vec{V}_0$ y $\vec{w}$ son vectores puramente temporales siendo el segundo de dirección fija y O un punto determinado del sistema, el movimiento será interpretado como un movimiento rototraslatorio impropio.

Obsérvese que lo anterior puede interpretarse como un movimiento rototraslatorio propio. De manera que denotando con $\vec{w}$ un vector fijo, el vector $\vec{V}_0$ (puramente temporal) mediante la posición

$$\vec{V}_t = \vec{V}_0 + \vec{w} \wedge (C - O) \tag{59}$$

restando miembro a miembro las (58) y (59) se obtiene la (56) que caracteriza un movimiento *rototraslatorio propio.*

12. Movimiento rototraslatorio uniforme.—En especial es interesante el caso en que los movimientos componentes de un movimiento rototraslatorio propio sean uniformes y que se traduce por la constancia de los vectores que los caracterizan $\vec{V}_t$ y $\vec{w}$.

Demostraremos que cuando el movimiento compuesto es uniforme será justificado llamarle movimiento *rototraslatorio uniforme.*

En efecto descompongamos el vector $\vec{V}_t$ en dos, uno según la dirección fija de $\vec{w}$ tal como $\vec{V}_1$ y el otro según la dirección plana ortogonal tal como el $\vec{V}_2$ entonces

(60) $$\overrightarrow{V_t} = \sum_{1}^{2} \overrightarrow{V_u}$$

Sabemos que al multiplicar vectorialmente los vectores $\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{V_2}$ que son ambos ortogonales, equivale a hacer girar $\overrightarrow{V_2}$ alrededor de $\overrightarrow{w}$ un ángulo recto determinando el vector constante

(61) $$\overrightarrow{h_1} = \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{V_2}$$

Si multiplicamos ahora vectorialmente por el vector $-\overrightarrow{w}$ se tendrá (pág. 56, fórmula 96)

(62) $$\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{h_1} = \overrightarrow{w} \wedge (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{V_2}) = -w^2 \overrightarrow{V_2}$$

de donde

(63) $$\overrightarrow{V_2} = -\frac{1}{w^2} \overrightarrow{w} \wedge (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{V_2})$$

o bien puede escribirse:

(64) $$\overrightarrow{V_2} = -\overrightarrow{w} \wedge \left[\frac{1}{w^2} \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{V_2}\right]$$

siendo

(65) $$\overrightarrow{h} = \frac{1}{w^2} \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{V_2} = \frac{1}{w^2} \overrightarrow{h_1}$$

entonces

$$\vec{V}_2 = -\vec{w} \wedge \vec{h} \tag{66}$$

Como

$$\vec{V} = \vec{V}_t + \vec{V}_c \tag{67}$$

siendo

$$\vec{V}_c = \vec{w} \wedge (P - C) \tag{68}$$

se tendra

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{w} \wedge (P - C) - \vec{w} \wedge \vec{h} \tag{69}$$

o bien la suma del punto C y el vector $\vec{h}$ da el punto $C_1 = C + \vec{h}$ entonces la (69) se reduce a la

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{w} \wedge (P - C_1) \tag{70}$$

Es el vector velocidad en el movimiento rototraslatorio compuesto en el caso particular que tratamos que es igual al vector velocidad del movimiento traslatorio uniforme sumándole geométricamente el vector velocidad lineal que corresponde al movimiento angular $\vec{w}$ uniforme siendo $\vec{V}_1$ paralelo a $\vec{w}$, verificándose el movimiento alrededor del eje que en la dirección común $\vec{V}_1$ y $\vec{w}$ pasa por C_1.

1°. Si $\overrightarrow{V_1} = 0$ por la (60) es $\overrightarrow{V_t} = \overrightarrow{V_2}$ se tratará de componer un movimiento traslatorio uniforme con un movimiento rotatorio uniforme, siendo ambos ortogonales el movimiento resultante quedará determinado por la (70) que se reduce a la

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{w} \wedge (P - C_1) \tag{71}$$

que es un movimiento rotatorio uniforme con igual velocidad angular alrededor de un eje paralelo al considerado

2°. Si

$$\overrightarrow{V_1} \neq 0 \quad \text{y} \quad \overrightarrow{V_2} \neq 0 \tag{72}$$

como el punto C_1 esta en el eje de rotación resultante de la composición según el caso anterior, ahora como podemos escribir que

$$(P - C_1) = (P - P_1) + (P_1 - C_1) \tag{73}$$

siendo P_1 la proyección ortogonal de P sobre la dirección plana ortogonal al eje y P_2 la proyección de P sobre la dirección del eje, como $P - P_1$ es paralelo a $\overrightarrow{w}$ la (71) puede escribirse asi

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{w} \wedge (P_1 - C_1) \tag{74}$$

el movimiento será rotatorio uniforme alrededor de C_1 resultando que el movimiento del punto genérico P del sistema será helicoidal uniforme.

La velocidad escalar de dicho movimiento helicoidal uniforme se deduce facilmente

$$V^2 = V_1^{\,2} + w^2.(P_1P_2)^2 \tag{75}$$

Consideremos una terna $Ox_1x_2x_3$ solidaria con el sistema, que sea la terna móvil correspondiente el eje x_3 como el eje de rotación orientado en el sentido de $\vec{w}$ y $Cy_1y_2y_3$ sea una terna fija que coincida con la $Ox_1x_2x_3$ cuando el tiempo $t = 0$, así se tendrá

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cos wt - x_2 \operatorname{sen} wt \\ y_2 &= x_1 \operatorname{sen} wt + x_2 \cos wt \\ y_3 &= \pm V_1 t + x_3 \end{aligned} \tag{76}$$

§ 3.—Movimiento rígido general.

13. Fórmulas de Poisson.—Consideremos en un sistema rígido un punto genérico P y referido a una terna $Ox_1x_2x_3$ siendo $\vec{\imath}_u$ por $u = 1,2,3$ los versores fundamentales.

El vector

$$P - O = \sum_{1\,u}^{3} \vec{\imath}_u x_u$$

siendo

$$P = O + \sum_{1\,u}^{3} \vec{\imath}_u x_u \tag{77}$$

diferenciándola con respecto al tiempo se tiene el vector velocidad

$$(78) \qquad \frac{\vec{dP}}{dt} = \frac{\vec{dO}}{dt} + \sum_{1}^{3} u \left[\bar{\imath}_u \frac{dx_u}{dt} + \frac{d\bar{\imath}_u}{dt} x_u \right]$$

para un sistema rígido debe ser

$$(79) \qquad \frac{dx_u}{dt} = 0 \qquad \text{por} \quad u = 1,2,3$$

entonces

$$(80) \qquad \frac{\vec{dP}}{dt} = \frac{\vec{dO}}{dt} + \sum_{1}^{3} u \frac{d\bar{\imath}_u}{dt} x_u$$

Las componentes del vector $\frac{d\bar{\imath}_u}{dt}$ por $u = 1,2,3$ respecto a los ejes móviles son $\frac{d\bar{\imath}_u}{dt} \times \bar{\imath}_v$; por $v = 1,2,3$, entonces el vector $\frac{d\bar{\imath}_u}{dt}$ quedará definido por la expresión

$$(81) \qquad \frac{d\bar{\imath}_u}{dt} = \sum_{1}^{3} v \left\{ \frac{d\bar{\imath}_u}{dt} \times \bar{\imath}_v \right\} \bar{\imath}_v \qquad u = 1,2,3$$

teniendo presente que

$$(82) \qquad \bar{\imath}_v \times \bar{\imath}_w = \begin{cases} 1 \text{ por } v = w \\ 0 \quad ,, \quad v \neq w \end{cases}$$

por diferenciación se deduce

(83) $$\frac{d\bar{\imath}_{\mathrm{v}}}{dt} \times \bar{\imath}_{w} + \frac{d\bar{\imath}_{w}}{dt} \times \bar{\imath}_{\mathrm{v}} = 0$$

cuando $w = \mathrm{v} = u$

(84) $$\frac{d\bar{\imath}_{u}}{dt} \times \bar{\imath}_{u} = 0$$

por la anterior (83) se deduce que

(85) $$\frac{d\bar{\imath}_{\mathrm{v}}}{dt} \times \bar{\imath}_{w} = -\frac{d\bar{\imath}_{w}}{dt} \times \bar{\imath}_{\mathrm{v}}$$

entonces la (81) se reduce a la

(86) $$\frac{d\bar{\imath}_{\mathrm{u}}}{dt} = \left\{\frac{d\bar{\imath}_{\mathrm{u}}}{dt} \times \bar{\imath}_{\mathrm{v}}\right\} \bar{\imath}_{\mathrm{v}} - \left\{\frac{d\bar{\imath}_{w}}{dt} \times \bar{\imath}_{u}\right\} \bar{\imath}_{w}$$

Teniendo presente que

(87) $$\bar{\imath}_{\mathrm{v}} = \bar{\imath}_{w} \wedge \bar{\imath}_{u} \qquad \bar{\imath}_{w} = \bar{\imath}_{u} \wedge \bar{\imath}_{\mathrm{v}} \qquad \bar{\imath}_{w} = -\bar{\imath}_{\mathrm{v}} \wedge \bar{\imath}_{u}$$

luego se deduce

(88) $$\frac{d\bar{\imath}_{\mathrm{u}}}{dt} = \left\{\left\{\frac{d\bar{\imath}_{w}}{dt} \times \bar{\imath}_{u}\right\} \bar{\imath}_{\mathrm{v}} + \left\{\frac{d\bar{\imath}_{u}}{dt} \times \bar{\imath}_{\mathrm{v}}\right\} \bar{\imath}_{w}\right\} \wedge \bar{\imath}_{\mathrm{u}}$$

sumando al segundo miembro la expresión

$$(89) \qquad \left[\left(\frac{d\bar{\imath}_v}{dt} \times \bar{\imath}_w\right)\bar{\imath}_u\right] \wedge \bar{\imath}_u$$

que representa el producto vectorial o externo de dos vectores paralelos que es nulo, luego se tendrá:

$$(90) \qquad \frac{d\bar{\imath}_u}{dt} = \left\{\left(\frac{d\bar{\imath}_v}{dt} \times \bar{\imath}_w\right)\bar{\imath}_u + \left(\frac{d\bar{\imath}_w}{dt} \times \bar{\imath}_u\right)\bar{\imath}_v + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d\bar{\imath}_u}{dt} \times \bar{\imath}_w\right)\bar{\imath}_w\right\} \wedge \bar{\imath}_u$$

$$(91) \qquad \text{por} \quad u \neq v \neq w = 1,2,3$$

Como en el paréntesis se repite en las tres ecuaciones se tendrá:

$$(92) \qquad \vec{\omega} = \left(\frac{d\bar{\imath}_v}{dt} \times \bar{\imath}_w\right)\bar{\imath}_u + \left(\frac{d\bar{\imath}_w}{dt} \times \bar{\imath}_u\right)\bar{\imath}_v + \left(\frac{d\bar{\imath}_u}{dt} \times \bar{\imath}_v\right)\bar{\imath}_w$$

de la cual se deduce que

$$(93) \qquad \frac{d\bar{\imath}_u}{dt} = \vec{\omega} \wedge \bar{\imath}_u \qquad u = 1,2,3$$

que son las *fórmulas de Poisson.*

14 Componentes cartesianas del vector $\vec{\omega}$.—Multiplicando escalarmente la ecuación geométrica (92) por los versores que correspon-

den a la terna móvil, inmediatamente se obtienen las componentes del vector $\vec{\omega}$ segun dichos ejes ortogonales móviles, téngase presente que

$$\vec{\omega} = \vec{b}\,\omega$$

(94) $$\bar{\imath}_u \times \vec{\omega} = p_u = \frac{d\bar{\imath}_v}{dt} \times \bar{\imath}_w = -\frac{d\bar{\imath}_w}{dt} \times \bar{\imath}_v$$

siendo $$u \neq v \neq w = 1,2,3$$

reemplazando en la (92) se tiene

(95) $$\vec{\omega} = \sum_{1}^{3} \bar{\imath}_u\, p_u$$

15 Velocidad en un movimiento rigido general.—La ecuación geométrica

(96) $$P = O + \sum_{1}^{3} \bar{\imath}_u\, x_u$$

diferenciada con respecto al tiempo se tiene la

(97) $$\frac{\vec{dP}}{dt} = \frac{\vec{dO}}{dt} + \sum_{1}^{3} \frac{d\bar{\imath}_u}{dt}\, x_u$$

teniendo presente las fórmulas de Poisson se deduce

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{O}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \sum_{1}^{3}{}_{u} \bar{\imath}_u x_u \tag{98}$$

o bien

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

Los vectores $\vec{V}_0$ y $\vec{\omega}$ son los denominados *vectores característicos del movimiento.*

16 Componentes cartesianas del vector $\vec{\omega}$.—En el estudio cuantitativo de la magnitud que caracteriza un movimiento de un sistema rígido alrededor de un punto fijo, es necesario saber definir por medio de ciertos parámetros la posición del sistema rígido respecto a una terna de referencia.

Consideremos una terna fija $O_1y_1y_2y_3$ en el espacio y $Ox_1x_2x_3$ otra terna rígidamente ligada al sistema rígido. La posición de la terna $Ox_1x_2x_3$ respecto a la $O_1y_1y_2y_3$ definirá la posición del sistema rígido o al contrario. La posición de una terna con respecto a la otra quedaría determinada en cada instante mediante las coordenadas de O respecto a la terna $O_1y_1y_2y_3$ que son a_ν por $\nu = 1,2,3$ y nueve cosenos directores.

Los versores fundamentales de la terna $Ox_1x_2x_3$ son $\bar{\imath}_\nu$ y los de la terna $O_1y_1y_2y_3$ son $\bar{\jmath}_\nu$ es sabido que

$$\bar{\jmath}_u = \sum_{1}^{3}{}_{\iota} \bar{\imath}_{iu} \cos \alpha_{iu} \tag{99}$$

Multiplicando escalarmente por $\bar{\jmath}_\nu$

$$\bar{\jmath}_\nu \times \bar{\jmath}_u = \sum_{1}^{3}{}_{ik} \cos \alpha_{iu} \cos \alpha_{k\nu} = \begin{cases} 1 & u = \nu \\ 0 & u \neq \nu \end{cases} \tag{100}$$

del mismo modo

(101) $$\bar{\imath}_i = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\jmath}_u \cos a_{ui}$$

(102) $$\bar{\imath}_i \times \bar{\imath}_k = \sum_{1\,uv}^{3} \cos a_{ui} \cos a_{vk} \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Sabemos además que

103) $$\bar{\jmath}_1 \times \bar{\jmath}_2 \wedge \bar{\jmath}_3 = \bar{\imath}_1 \times \bar{\imath}_2 \wedge \bar{\imath}_3 = \begin{vmatrix} \cos a_{11} & \cos a_{21} & \cos a_{31} \\ \cos a_{12} & \cos a_{22} & \cos a_{32} \\ \cos a_{13} & \cos a_{23} & \cos a_{33} \end{vmatrix} = 1$$

Ahora si consideramos el punto P referido a las ternas $Ox_1x_2x_3$ y $O_1y_1y_2y_3$ en el instante t se tendrá

(104) $$(P - O) = (P - O_1) - (O - O_1)$$

en representación cartesiana

(105) $$\sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u x_u = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\jmath}_u (y_u - a_u)$$

de la cual se deduce inmediatamente las fórmulas de transformación multiplicando escalarmente y respectivamente por los versores $\bar{\imath}_v$ y $\bar{\jmath}_v$ por $v = 1,2,3$

(106) $$x_v = \sum_{1\,u}^{3} (y_u - a_u) \cos a_{uv} \qquad y_v = a_v + \sum_{1\,u}^{3} x_u \cos a_{uv}$$

$$v = 1,2,3$$

17 Componentes cartesianas de la velocidad angular en un sistema rígido.—Reresentando $\bar{\imath}_u$ como ya sabemos los versores fundamentales de una terna ortogonal móvil teniendo en cuenta las propiedades de estos

$$\bar{\imath}_u \times \bar{\imath}_v = \begin{cases} 1 & \text{por} \quad u = v \\ 0 & ,, \quad u \neq v \end{cases}$$

(107)

$$\bar{\imath}_u \wedge \bar{\imath}_v = \begin{cases} 0 & \text{por} \quad u = v \\ \bar{\imath}_w & ,, \quad u \neq v \neq w \end{cases}$$

las derivadas serán

$$\bar{\imath}_u \times \frac{d\bar{\imath}_v}{dt} + \frac{d\bar{\imath}_u}{dt} \times \bar{\imath}_v = \begin{cases} 0 & \text{por} \quad u = v \\ 0 & ,, \quad u \neq v \end{cases} \tag{108}$$

Como el vector velocidad angular $\vec{\omega}$ está definido por

$$\vec{\omega} = \sum_{1}^{3} \bar{\imath}_u p_u \tag{109}$$

y teniendo presente que

$$p_u = \bar{\imath}_u \times \vec{\omega} \qquad \text{por} \quad u = 1,2,3$$

$$\vec{\omega} = \sum_{1}^{3} \bar{\imath}_u (\bar{\imath}_u \times \vec{\omega}) \tag{110}$$

Las fórmulas de Poisson son

$$(111) \qquad \frac{d\bar{\imath}_u}{dt} = \vec{\omega} \wedge \bar{\imath}_u \qquad \text{por } u = 1,2,3$$

Multiplicando vectorialmente por $\bar{\imath}_u$ la (109)

$$\frac{d\bar{\imath}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \bar{\imath}_1 = \bar{\imath}_2 p_3 - \bar{\imath}_3 p_2$$

$$(112) \qquad \frac{d\bar{\imath}_2}{dt} = \vec{\omega} \wedge \bar{\imath}_2 = \bar{\imath}_3 p_1 - \bar{\imath}_1 p_3$$

$$\frac{d\bar{\imath}_3}{dt} = \vec{\omega} \wedge \bar{\imath}_3 = \bar{\imath}_1 p_2 - \bar{\imath}_2 p_1$$

Multiplicando escalarmente la (109) por los versores $\bar{\imath}_u$ por $u = 1,2,3$ se tendrá

$$\bar{\imath}_2 \times \frac{d\bar{\imath}_1}{dt} = p_3 \qquad \bar{\imath}_3 \times \frac{d\bar{\imath}_1}{dt} = -p_2$$

$$(113) \qquad \bar{\imath}_3 \times \frac{d\bar{\imath}_2}{dt} = p_1 \qquad \bar{\imath}_1 \times \frac{d\bar{\imath}_2}{dt} = -p_3$$

$$\bar{\imath}_1 \times \frac{d\bar{\imath}_3}{dt} = p_2 \qquad \bar{\imath}_2 \times \frac{d\bar{\imath}_3}{dt} = -p_1$$

18 Componentes cartesianas del vector $\vec{V}$.—Teniendo presente la expresión cartesiana del producto vectorial podremos conocer el vector $\vec{V}$ que corresponde a un punto P del sistema rígido S.

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge (P - O) \tag{114}$$

En efecto como

siendo $\vec{\omega} = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u p$ y $P - O = \sum_{1\,u}^{3} \bar{\imath}_u x_u$

multiplicando escalarmente por los versores fundamentales $\bar{\imath}_u$ que corresponden a la terna móvil $Ox_1x_2x_3$ se obtendrán las componentes del vector $\vec{V}$ según la dirección de dichos versores que están dadas por las fórmulas de Euler.

$$\begin{aligned} V_{x_1} &= V_{ox_1} + p_2 x_3 - p_3 x_2 \\ V_{x_2} &= V_{ox_2} + p_3 x_1 - p_1 x_3 \\ V_{x_3} &= V_{ox_3} + p_1 x_2 - p_2 x_1 \end{aligned} \tag{115}$$

Si consideramos otra terna $O_1y_1y_2y_3$ tambien ortogonal, pero supuesta fija, cuyos versores fundamentales sean $\bar{\jmath}_u$ por $u = 1,2,3$ los componentes del vector $\vec{V}_0$ respecto a los ejes fijos, serán V_{oyu}

$$V_{ox_v} = \vec{V}_0 \times \bar{\imath}_v = \sum_{1\,u}^{3} V_{oy_u} \cos \alpha_{uv} \tag{115'}$$

19 Distribución instantánea de la velocidad y movimiento helicoidal tangente.—La fórmula deducida anteriormente (114) tiene el aspecto formal de la (58), pero en la (58) los vectores $\vec{V}_0$ y $\vec{\omega}$ son puramente temporales, mientras que en la última (114) $\vec{V}_0$ es interpretado

como velocidad del punto O y $\vec{\omega}$ es un vector de dirección variable así lo hemos considerado anteriormente en la (114) obteniéndolo por un procedimiento puramente formal y no teniendo hasta ahora algún significado cinemático.

Recíprocamente si dos vectores $\vec{V}_0$ y $\vec{\omega}$ son puramente temporales como antes, página 221, se demuestra que el movimiento en el cual la distribución de las velocidades esta conforme con la (114) es un movimiento rígido.

Por las razones expuestas a los vectores $\vec{V}_0$ y $\vec{\omega}$ es que se les ha denominado *vectores característicos* del movimiento rígido respecto al polo O al cual se le llama *polo o centro de reducción.*

La manera de encontrar la interpretación cinemática del vector $\vec{\omega}$ es fijando un instante genérico t^* al cual corresponden los vectores característicos $\vec{V}_0^*$ y $\vec{\omega}^*$ respecto del polo O (solidario al sistema móvil) en dicho instante para el punto se tendrá:

$$\vec{V} = \vec{V}_0^* + \vec{\omega}^* \wedge (P - O) \tag{116}$$

que da la distribución de la velocidad de los puntos del sistema S en el instante t^*.

Teniendo presente la fórmula 55 se concluye por considerar que las velocidades de los diversos puntos del sistema S en el instante t^* es la misma como si se admite que el sistema se encontrase animado de un movimiento rototraslatorio uniforme, o lo que es lo mismo helicoidal compuesto, en un sentido impropio de una traslación de velocidad $\vec{V}_0^*$ y de una rotación de velocidad angular $\vec{\omega}^*$ alrededor de un eje paralelo de $\vec{\omega}^*$, que pasa por el punto O estando dicho eje animado de un movimiento de traslación con la velocidad $\vec{V}_0$.

Como dicho movimiento helicoidal varía generalmente de un instante a otro puesto que varían con el tiempo t los vectores $\vec{V}_0$ y $\vec{\omega}$ por tal razón se le denomina *movimiento helicoidal tangente* al

movimiento rígido en el instante considerado. Maggi denomina *acto de movimiento* la distribución instantánea de velocidades, puede decirse que un acto de movimiento es helicoidal.

De lo anteriormente expresado se deduce que el vector $\vec{\omega}$ en cada instante se le puede interpretar como velocidad angular del correspondiente movimiento helicoidal tangente y por esta razón se denomina *velocidad angular* del movimiento rígido.

Podremos decir: que *un movimiento rígido tiene en cada instante carácter de movimiento helicoidal.*

La recta que pasa por el punto O y que tiene la dirección de $\vec{\omega}$ (o sea el eje del movimiento componente rotatorio) en la descomposición impropia relativa a O del movimiento helicoidal tangente se denomina *eje instantáneo de rotación* respecto a O, mientras que el eje del movimiento helicoidal tangente paralelo en cada instante a $\vec{\omega}$ se denomina *eje del movimiento* (rígido) en el instante considerado, este fué el eje indicado por G. Mozzi, por tal razón se le denomina eje de Mozzi.

Se observa que en un instante el eje del movimiento es único, mientras que el eje instantáneo de rotación varía al variar el polo.

El eje del movimiento varía en general con el tiempo, tanto respecto a los ejes cartesianos móviles cuanto a los ejes fijos y en cada instante, de acuerdo con su misma definición, desde luego para los puntos en que la velocidad es en aquel instante paralela a la determinación instantánea de la velocidad angular, las ecuaciones de Euler (115) nos conducen a las

$$(115^*) \qquad \frac{V_{ox_1} + p_2 x_3 - p_3 x_2}{p_1} = \frac{V_{ox_2} + p_3 x_1 - p_1 x_3}{p_2} =$$

$$= \frac{V_{ox_3} + p_1 x_2 - p_2 x_1}{p_3}$$

que son las ecuaciones del eje instantáneo respecto a los ejes móviles, las que nos permiten observar que el eje del movimiento resulta indeterminado en todo o solo en aquel instante en el cual la naturaleza del movimiento del sistema rígido es puramente traslatorio.

20 Vamos a encontrar ahora la la expresión que corresponde al corrimiento elemental de $\overrightarrow{dP}$ del punto P del sistema S en el pasaje del instante t al instante $t + dt$.

El corrimiento $\overrightarrow{dP}$ tiene por expresión

$$\overrightarrow{dP} = \overrightarrow{V}\, dt$$

se obtiene multiplicando la

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{\omega} \wedge (P - O) \tag{117}$$

por dt y poniendo

$$\overrightarrow{dO} = \overrightarrow{V_0} dt \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{\Psi} = \overrightarrow{\omega}\, dt$$

se tiene

$$\overrightarrow{dP} = \overrightarrow{dO} + \overrightarrow{\Psi} \wedge (P - O) \tag{118}$$

El vector $\overrightarrow{dO}$ se interpreta como corrimiento del punto O que se produce lo mismo para todos los puntos P de S, tiene el caracter traslatorio.

El vector $\overrightarrow{\Psi} \wedge (P - O)$ tiene el carácter rotatorio. El corrimiento considerado se produce en la recta que pasa por O y es paralela a $\overrightarrow{\Psi}$ ó sea define un eje instantáneo de rotación. Donde resulta que el corrimiento elemental de un punto P de un sistema rígido S es la suma de un corrimiento traslatorio y de un corrimiento rotatorio.

Con referencia al movimiento helicoidal tangente al correspondiente eje del movimiento se ve que el movimiento del sistema S

en el tiempo elemental *dt* se produce como si en un punto subsistiese un corrimiento traslatorio en el sentido del eje del movimiento acompañado de un corrimiento rotatorio alrededor del mismo eje.

21 Modo de variar los vectores característicos.—Por la fórmula $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{\omega} \wedge (P - O)$ observaremos como varían los vectores característicos $\overrightarrow{V_0}$ y $\overrightarrow{\omega}$ al variar el centro de reducción.

Denominando $\overrightarrow{V_0^*}$ y $\overrightarrow{\omega^*}$ los vectores característicos con respecto a otro polo O^* e igualando las dos expresiones de $\overrightarrow{V}$ (que naturalmente no varían con el polo) se tiene:

$$\overrightarrow{V_0^*} = \overrightarrow{\omega^*} \wedge (P - O^*) = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{\omega} \wedge (P - O)$$

Esta igualdad debera subsistir cualquiera que sea el punto P y en particular cuando P coincide con O^* se tendrá:

(119) $$\overrightarrow{V^*} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{\omega} \wedge (O^* - O)$$

como $$(\overrightarrow{\omega} - \overrightarrow{\omega^*}) \wedge (P - O^*) = 0$$

por la arbitariedad de P se deduce que

$$\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega^*}$$

quedará determinado por otro procedimiento el eje del movimiento helicoidal o sea el eje del movimiento rígido.

La velocidad de traslación a lo largo del eje del movimiento quedará determinada por el momento mínimo del sistema de vectores aplicados.

$$\frac{\vec{V}_0 \times \vec{\omega}}{\vec{\omega}} = \frac{\sum_{1}^{3} V_{0x_u} p_u}{\sqrt{\sum_{1}^{3} p_u}} \tag{120}$$

al hacerse cero el término invariante

$$\vec{V}_0 \times \vec{\omega} = \sum_{1}^{3} V_{0x_u} p_u = 0 \tag{121}$$

da la condición necesaria y suficiente para que al anularse el vector $\vec{\omega} = 0$ o bién $\vec{V}_0 = 0$ el movimiento en cada instante sea puramente traslatorio o puramente rotatorio.

Consideremos el movimiento instantáneo compuesto de dos movimientos rígidos cualesquiera. Sean $\vec{V}_0{}^*$; $\vec{\omega}^*$ y $\vec{V}_0{}^{**}$; $\vec{\omega}^{**}$ los vectores característicos de los dos movimientos componentes con respecto al mismo polo O.

Las velocidades $\vec{V}^*$ y $\vec{V}^{**}$ de un mismo punto P están dadas por las expresiones

$$\vec{V}^* = \vec{V}_0{}^* + \vec{\omega}^* \wedge (P - O)$$

$$\vec{V}^{**} = \vec{V}_0{}^{**} + \vec{\omega}^{**} \wedge (P - O) \tag{122}$$

En el movimiento compuesto la velocidad $\vec{V}$ de P es

$$\vec{V} = \vec{V}^* + \vec{V}^{**}$$

o sea

$$\vec{V} = (\vec{V}_0^* + \vec{V}_0^{**}) + (\vec{\omega}^* + \vec{\omega}^{**}) \wedge (P - O) \tag{123}$$

resulta que el *vector característico del movimiento compuesto de dos movimientos rígidos respecto al mismo polo O es la suma de los análogos vectores de los movimientos componentes.*

Una simple y expresiva aplicación es la del movimiento compuesto de dos movimientos que tienen en cada instante el caracter rotatorio alrededor de ejes que pasan por el mismo punto. Escogiendo dicho punto como centro de reducción resulta $\vec{V}^* = \vec{V}^{**} = 0$ $\vec{\omega} = \vec{\omega}^* + \vec{\omega}^{**}$ se tendrá

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge (P - O) \tag{124}$$

Por la comparación de las (119) con la de página 80 (153) se deduce *que los vectores característicos* $\vec{V}_0$ y $\vec{\omega}$ *cuando varía el polo se comportan como el resultante y el momento resultante de un sistema de vectores aplicados, al variar el centro de reducción.*

Si se elige como centro de reducción un punto del eje central del sistema de vectores, el correspondiente vector $\vec{V}_0$ resulta paralelo al $\vec{\omega}$. El movimiento instantáneo ahora será equivalente a una traslación elemental a lo largo del eje central acompañado de una rotación elemental alrededor del mismo eje; y así se deduce *que el movimiento compuesto de dos movimientos instantáneos rotatorios alrededor de ejes concurrentes es un movimiento instantáneo rotatorio alrededor de un eje que pasa por el punto de intersección de los ejes de los movimientos componentes.*

22. **Movimiento rigido con un punto fijo o paralelo a un plano fijo.**—En la teoría vectorial hemos visto que un sistema de vectores

aplicados es reductible a un solo vector o a un par cuando se anula el correspondiente trinomio invariante. En el caso de un sistema de vectores como en el caso anterior, esto se verifica cuando resulta

$$\vec{V}_0 \times \vec{\omega} = 0 \tag{125}$$

Lo que expresa que es nulo el vector resultante $\vec{\omega}$ o bien que existe un centro de reducción respecto al cual el momento resultante $\vec{V}_0$ resulta igual a cero, o bien que son nulos a la vez $\vec{V}_0$ y $\vec{\omega}$.

En el primer caso el movimiento rígido instantáneo se reduce a una traslación, en el segundo a una única rotación y en el tercero todo el sistema se encuentra en equilibrio.

Facilmente se demuestra que la condición $\vec{V}_0 \times \vec{\omega} = 0$ se verifica en dos casos particularmente interesantes durante todo el movimiento, o en un solo determinado instante.

En efecto supongamos que el sistema rígido S esté dotado de un punto fijo O. Escogiendo este punto como centro de reducción será constantemente $\vec{V}_0 = 0$ y la (125) será satisfecha. debiendo ser $\vec{\omega} = 0$ se deduce *que el movimiento de un sistema rígido dotado de un punto fijo se reduce en un instante a una rotación elemental alrededor de un eje que pasa por este punto.*

El segundo caso, que es también satisfecha la (125). Individualizando una dirección plana H por el plano de referencia Ox_1x_2, el versor $\vec{\imath}_3$ para el movimiento, que tratamos, se mantendrá constante, y por la tercera fórmula de Poisson se tendrá

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\imath}_3 = 0$$

de la cual resulta que el vector $\vec{\omega}$ si no es nulo deberá ser paralelo al versor $\vec{\imath}_3$ es decir ortogonal a la dirección plana H.

Por otra parte, cualquiera que sea el punto O la velocidad $\vec{V}_0$ será siempre paralela a H cuando en un instante es

$$\vec{V}_0 \times \vec{\omega} = 0$$

lo que nos dice: que un movimiento rígido paralelo a una dirección plana fija se reduce siempre, en cada instante a una única traslación paralela a la dirección plana o bien a una única rotación alrededor de un eje normal a la dirección plana.

Como el movimiento rígido paralelo a una dirección plana fija, el cual puede realizarse considerando un plano π solidario con el sistema rígido sujeto a moverse sobre un plano fijo π_1. Si elegímos π y π_1, que sean los planos de referencia x_1x_2 e y_1y_2, el versor $\vec{i}_3$ se mantendrá constante (puesto que siempre deberá ser ortogonal al plano y_1y_2. entonces

$$p_1 = 0 \qquad p_2 = 0 \qquad p_3 = \omega$$

CAPITULO SEXTO

TEORIA DEL MOVIMIENTO RELATIVO

§ 1. Generalidad.—Principio fundamental del movimiento relativo. Teorema de Coriolis.

1 Se denomina movimiento relativo de un punto cuando el punto de referencia se mueve también, de manera que si al sistema formado por estos dos puntos le damos un movimiento común no altera el sistema en nada la relación de sus movimientos, pero si dicho movimiento común es igual y contrario al del punto de referencia, éste quedará en reposo, mientras que el punto móvil se encontrará animado de dos movimientos, el que realmente tenía y otro igual y contrario al del punto de referencia, los que se deben componer, este es el teorema o principio fundamental de la teoría del movimiento relativo.

2 Si el punto está en reposo, solamente habrá que considerar el movimiento de arrastre en sentido contrario y nos parecerá que el punto se mueve en sentido contrario.

3 Si el punto móvil tiene movimiento absoluto igual al que tiene el punto de referencia, entonces parece que el punto móvil estuviese en reposo.

4 Cuando el movimiento de un punto está referido a dos ternas las cuales a la vez están en movimiento la una con respecto a

la otra. El objeto que se persigue es estudiar las relaciones que intervienen en los distintos aspectos del fenómeno observado en el uno o en el otro de estos dos sistemas de referencia.

Sea $O_1y_1y_2y_3$ una de las ternas consideradas, que por pura comodidad en el lenguaje, la denominaremos *fija* y $Ox_1x_2x_3$ la otra terna que la consideraremos *móvil.* Sea P el punto móvil hemos denominado *movimiento absoluto,* al movimiento de P respecto a la terna fija, *movimiento relativo* al de P respecto a la terna móvil y *movimiento de arrastre* al de la terna móvil con relación a la fija.

Representemos por $\overrightarrow{V_A}$, $\overrightarrow{V_r}$ y $\overrightarrow{V_a}$ los vectores velocidad absoluta, relativa y de arrastre y $\overrightarrow{J_A}$, $\overrightarrow{J_r}$ y $\overrightarrow{J_a}$ los vectores aceleración absoluta, relativa y de arrastre.

Sabemos en la teoría del movimiento absoluto que

$$P = O_1 + \sum_{1}^{3} \bar{\jmath}_u \, y_u \tag{1}$$

esto es refiriéndose al movimiento del punto P con respecto a la terna $O_1y_1y_2y_3$ considerada como *fija.*

$$P = O + \sum_{1}^{3} \bar{\imath}_u \, x_u \tag{2}$$

respecto a la terna $Ox_1x_2x_3$ considerada como *móvil.*

De manera que

$$(P - O_1) = (O - O_1) + (P - O) \tag{3}$$

y como

$$O - O_1 = \sum_{1}^{3} \bar{\jmath}_u \, a_u \tag{4}$$

se deduce que

$$(5) \qquad \sum_{1u}^{3} \bar{\jmath}_u y_u = \sum_{1u}^{3} \bar{\jmath}_u a_u + \sum_{1u}^{3} \bar{\imath}_u x_u$$

En esta relación varían con el tiempo las x_u porque la posición de P varía no solo respecto a la terna fija sino tambien respecto a la terna móvil.

Diferenciándo con respecto al tiempo (2) se obtiene la velocidad vectorial absoluta

$$(6) \qquad \frac{\overline{dP}}{dt} = \frac{\overline{dO}}{dt} + \sum_{1u}^{3} \frac{d\bar{\imath}_u}{dt} x_u + \sum_{1u}^{3} \bar{\imath}_u \frac{dx_u}{dt}$$

El vector

$$(7) \qquad \overline{V}_a = \frac{\overline{dO}}{dt} + \sum_{1u}^{3} \frac{d\bar{\imath}_u}{dt} x_u$$

expresa en cada instante la velocidad vectorial de arrastre respecto de la terna fija, como si el punto P fuese solidario con la terna móvil.

Obsérvese que anulándose $\overline{V}_r = 0$ en la (6) se reduce a la (7) por tal razón a $\overline{V}_a$ se le denomina velocidad de arrastre, entonces

$$(8) \qquad \overline{V}_A = \overline{V}_r + \overline{V}_a$$

nos dice: que en cada instante la velocidad absoluta en el punto P es la resultante de su velocidad relativa y de la simultánea velocidad de arrastre.

En lo expresado anteriormente consiste el principio del movimiento relativo o de la composición de las velocidades.

Lo anterior establece el principio para un solo punto. Cuando se trata de un sistema S las consideraciones anteriores se referirán a un punto del sistema.

La aceleración vectorial se obtiene volviendo a diferenciar con respecto al tiempo la (6)

$$(9) \qquad \frac{d^2\vec{P}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{O}}{dt^2} + \sum_{1}^{3} \frac{d^2\vec{\imath}_u}{dt^2} x_u + 2\sum_{1}^{3} \frac{d\vec{\imath}_u}{dt} \frac{dx_u}{dt}$$

$$+ \sum_{1}^{3} \vec{\imath}_u \frac{d^2x_u}{dt^2}$$

El vector $\frac{d^2\vec{P}}{dt^2}$ representa la *aceleración absoluta vectorial* $\vec{J}_A$, el vector $\sum_{1}^{3} \vec{\imath}_u \frac{d^2x_u}{dt^2}$ la *aceleración relativa vectorial* $\vec{J}_r$ y el vector $\frac{d^2O}{dt^2} + \sum_{1}^{3} \frac{d^2\vec{\imath}_u}{dt^2} x_u$ representa la aceleración de arrastre vectorial $\vec{J}_a$.

El vector $\sum_{1}^{3} \frac{d\vec{\imath}_u}{dt} \cdot \frac{dx_u}{dt}$ representa la *aceleración complementaria vectorial* $\vec{J}_c$ que tambien se denomina *aceleración centrífuga compuesta o aceleración de Coriolis*, entonces se podrá escribir la (9) en la forma siguiente:

$$(10) \qquad \vec{J}_A = \vec{J}_r + \vec{J}_a + 2\vec{J}_c$$

que es el teorema Coriolis.

Pasaremos a estudiar el vector $\vec{J}_c$ observemos teniendo presente las fórmulas de Poisson (93) página 238

(11) $$\vec{J}_c = \sum_{1}^{3} \frac{d\vec{\imath}_u}{dt} \frac{dx_u}{dt} = \vec{\omega} \wedge \sum_{1}^{3} \vec{\imath}_u \frac{dx_u}{dt}$$

o bien por ser $$\vec{V} = \sum_{1}^{3} \vec{\imath}_u \frac{dx_u}{dt}$$

(12) $$\vec{J}_c = \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

Esta aceleración será nula en los casos siguientes:

1°. Cuando $\vec{\omega} = 0$ es decir que el movimiento de arrastre sea una traslación pura.

2°. Cuondo $\vec{V}_r = 0$ no existe movimiento relativo en un eventual instante.

3°. Cuando el vector $\vec{\omega}$ es paralelo al vector V_r.

En el caso particular que el movimiento de arrastre sea una traslación pura y uniforme $\vec{V}_a = cte$ entonces la aceleración de arrastre será nula $\vec{J}_a = 0$.

5. Expresión cartesiana de la aceleración de Coriolis..—Los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{V}_r$ están definidos con respecto a una terna ortogonal $Ox_1 x_2 x_3$ por

(13) $$\vec{\omega} = \sum_{1}^{3} \vec{\imath}_u p_u \qquad \vec{V}_r = \sum_{1}^{3} \vec{\imath}_u V_{xu}$$

cuyo producto vectorial es

$$(14) \qquad \vec{J}_c = \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r = \bar{\imath}_1 (p_2 v_{x_2} - p_3 v_{x_2}) + \bar{\imath}_2 (p_3 v_{x_1} - p_1 v_{x_3}) +$$

$$+ \bar{\imath}_3 (p_1 v_{x_2} - p_2 v_{x_1})$$

Las componentes según los ejes se obtienen multiplicando escalarmente y respectivamente por los versores $\bar{\imath}_u$ por $u = 1,2,3$

$$J_{x_1} = p_2 v_{x_3} - p_3 v_{x_2}$$

$$(15) \qquad J_{x_2} = p_3 v_{x_1} - p_1 v_{x_3}$$

$$J_{x_3} = p_1 v_{x_2} - p_2 v_{x_1}$$

Cuando el eje de rotación es el x_3 se reducen puesto que $p_1 = 0$ $p_2 = 0$ $p_3 = \omega$ entonces

$$J_{x_1} = -\omega v_{x_2} \qquad J_{x_2} = \omega v_{x_1} \qquad v_{x_3} = 0$$

6 Movimiento particular de arrastre.—1°. Cuando el movimiento de arrastre es de *traslación*, todos los puntos solidarios con la terna móvil $Ox_1x_2x_3$ tienen en un instante la misma velocidad y la misma aceleración.

De manera que tanto la velocidad como la aceleración de arrastre son dos vectores puramente temporales, que son la velocidad y la aceleración vectorial del orígen O que representaremos por $\vec{V}_0$ y $\vec{J}_0$ entonces se tendrá

$$(16) \qquad \vec{V}_A = \vec{V}_r + \vec{V}_a$$

$$(17) \qquad \vec{J}_A = \vec{J}_r + \vec{J}_a + 2\vec{J}_c$$

2°. Cuando el movimiento de arrastre es de *rotación uniforme* entonces el vector $\vec{\omega} = cte.$

Podremos elegir como origen de la terna móvil un punto (fijo) del eje y proyectando el punto móvil P sobre el eje sea C la proyección ortogonal. La velocidad y la aceleración vectorial de arrastre estará expresada por

$$\vec{V}_a = \vec{\omega} \wedge (P - O) \tag{18}$$

$$\vec{J}_a = -\omega^2 (P - C) \tag{19}$$

por lo tanto reemplazando en las (16) y (17) se tiene

$$\vec{V}_A = \vec{V}_r + \vec{\omega} \wedge (P - O) \tag{20}$$

$$\vec{J}_A = \vec{J}_r - \omega^2 (P - C) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r \tag{21}$$

3°. Si se toma como eje de la terna móvil el eje de rotación orientado en el sentido del vector $\vec{\omega}$. Las componentes de $\vec{V}_A$ y $\vec{J}_A$ segun los ejes móviles serán

$$V_{x1} = x'_1 - \omega x_2 \qquad J_{x1} = x''_1 - \omega^2 x_1 - 2\omega x'_2$$

$$V_{x2} = x'_2 + \omega x_1 \tag{22}$$

$$J_{x2} = x''_2 - \omega^2 x_2 + 2\omega x'_1 \tag{23}$$

$$V_{x3} = x'_3 \qquad J_{x3} = x''_3$$

4°. Cuando el movimiento de arrastre es *helicoidal uniforme* estando el origen de la terna móvil sobre el relativo eje del movimiento será

$$\vec{V}_a = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge (P - O) \tag{24}$$

$$\vec{J}_a = -\omega^2 (P - C) \tag{25}$$

la velocidad vectorial constante $\vec{V}_0$ del punto O tendrá la misma dirección de la velocidad $\vec{\omega}$, entonces

$$\vec{V}_A = \vec{V}_r + \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge (P - O) \tag{26}$$

§ 2 Movimiento de un sistema rígido respecto a dos referencias móviles a la vez.

El criterio del movimiento absoluto, relativo y de arrastre que se ha tenido anteriormente para un solo punto se puede hacer extensivo al caso de un sistema en el cual sus puntos están en movimiento y en particular a un sistema rígido.

El principio del movimiento relativo referente a las velocidades y a las aceleraciones (Teorema de Coriolis), son válidos para todos los puntos del sistema rígido y bastarán para determinar la distribución de las velocidades y de las aceleraciones.

Consideremos el caso en que referimos el sistema rígido S a dos ternas móviles, la una con respecto a la otra $Ox_1x_2x_3$ y $O_1y_1y_2y_3$.

Debido al principio del movimiento relativo la velocidad absoluta vectorial de un punto P del sistema S se obtiene en cada instante sumando geométricamente los vectores velocidad relativa $\vec{V}_r$ y de arrastre $\vec{V}_a$ se trata de la composición de dos movimientos (página 227) siendo necesario diferenciar los dos casos.

En efecto, en el movimiento compuesto la velocidad del punto P era la velocidad del mismo punto que correspondía a ciertos dos movimientos definidos en un mismo intervalo de tiempo, mientras que la velocidad relativa $\vec{V}_r$ corresponde a un efectivo movimiento de P, la velocidad de arrastre $\vec{V}_a$ corresponde no a la velocidad del mismo punto P sino a un cierto punto solidario con la terna $Ox_1x_2x_3$ con quien P coincide instantáneamente al pasar.

La diferencia entre los dos casos puede apreciarse si se considera un movimiento rototraslatorio cualquiera, que puede ser tratado tanto como un movimiento compuesto, cuanto como un movimiento generado por arrastre.

La expresión del vector velocidad

$$\vec{V} = \vec{V}_t + \vec{\omega} \wedge (P - C)$$

traduce simplemente la descomposición del movimiento en un movimiento traslatorio y un movimiento rotatorio.

§ 3 Derivada vectorial respecto a ejes en movimiento.

Consideremos un vector $\vec{V}$ función del tiempo (o de cualquier otro parámetro) referido a una terna $Ox_1x_2x_3$, la derivada vectorial de $\vec{V}$ quedará definida por $\vec{J} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ que es el vector aceleración.

Las componentes del vector $\vec{V}$ según los ejes de la terna ortogonal $Ox_1x_2x_3$ son V_{xu}. Sabemos que la derivada (13) página 177 no varía si el vector se refiere tambien a otra terna $O_1y_1y_2y_3$ solidaria con la primitiva.

La variación se producirá generalmente cuando las dos ternas a las cuales se refiere estan en movimiento una con respecto a la otra,

y que se determinara conforme con la teoría del movimiento relativo, puesto que la expresada derivada depende de la terna de referencia.

La derivada $\frac{d\vec{V}}{dt}$ es la derivada absoluta de $\vec{V}$ respecto a $Ox_1x_2x_3$ que por comodidad en la locución denominaremos fija, la derivada $\frac{d_r\vec{V}}{dt}$ denominaremos derivada relativa de $\vec{V}$ con respecto a la terna móvil $O_1y_1y_2y_3$, introduciendo la terna auxiliar $O_1z_1z_2z_3$ que tenga el mismo origen que la terna móvil y que los ejes sean paralelos a los de la terna fija. Cualquiera que sea el movimiento del punto O_1 las componentes de $\vec{V}$ respecto de $Ox_1x_2x_3$ y de $O_1z_1z_2z_3$ son respectivamente idénticas tal que no diferira la derivada de $\vec{V}$ respecto de las dos ternas. De manera que para calcular la derivada $\frac{d\vec{V}}{dt}$ podremos referirnos a la terna $Ox_1x_2x_3$ o a la auxiliar $O_1z_1z_2z_3$.

Ahora si el vector $\vec{V}$ se imagina aplicado en O_1 el extremo libre P se moverá generalmente respecto de las dos ternas $O_1z_1z_2z_3$ y $O_1y_1y_2y_3$ es precisamente el movimiento de P respecto de $O_1z_1z_2z_3$ se podrá considerar como un movimiento absoluto generado por el movimiento de arrastre de la terna $O_1y_1y_2y_3$ respecto de la $O_1z_1z_2z_3$ que se considera como fija y del movimiento relativo de P respecto a la terna $O_1y_1y_2y_3$. Las coordenadas de P respecto a $O_1z_1z_2z_3$ y $O_1y_1y_2y_3$ serán V_{xu} y V_{yu} por $u = 1,23$ y los vectores $\frac{d\vec{V}}{dt}$ y $\frac{d_r\vec{V}}{dt}$ serán las velocidades absoluta y relativa de P, mientras que $\vec{\omega}$ será la velocidad vectorial angular de la terna $O_1y_1y_2y_3$ respecto de $O_1z_1z_2z_3$ o bien a la terna $Ox_1x_2x_3$. La velocidad de arrastre estará dada con relación al orígen de las dos ternas que constantemente coinciden por

$$\vec{V}_a = \vec{\omega} \wedge (P - O_1) \tag{27}$$

y como hemos observado el vector

$$P - O_1 = \vec{V}$$

será

$$\vec{V}_a = \vec{\omega} \wedge \vec{V} \tag{28}$$

Aplicando el teorema del movimiento relativo se obtiene la relación.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d_r \vec{V}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{V} \tag{29}$$

Se observará que las dos derivadas coinciden siempre que $\vec{\omega} \wedge \vec{V} = 0$ o sea en general cuando $\vec{V}$ es paralelo a $\vec{\omega}$ o al eje de rotación de la terna móvil o bien cuando $\vec{\omega} = 0$, es decir si el movimiento de la terna móvil es puramente de traslación.

Si en lugar del vector $\vec{V}$ se considera el vector $\vec{\omega}$ en la fórmula anterior se reduce a la

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d_r \vec{\omega}}{dt} \tag{30}$$

nos dice que en el movimiento rígido la velocidad angular tiene la misma derivada (aceleración angular) respecto a la terna fija y a la solidaria al sistema.

Ahora como $\vec{\omega} = \vec{b}\,\omega$ se deduce que

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d_r \vec{b}}{dt} \tag{31}$$

nos muestra *que durante el movimiento del sistema rígido, el eje del movimiento tiene dirección fija dentro del sistema y esta dirección es fija en el espacio y al contrario.*

La fórmula (29) nos conduce a lo siguiente: Si representamos por $\vec{V}_t$ y $\vec{\omega}$ los vectores velocidad componentes de un movimiento rototraslatorio y $\vec{V}_0$ y $\vec{\omega}$ son los vectores característicos (respecto de un polo cualquiera O) por la (30) $\vec{\omega}$ es constante respecto de la terna fija y de la terna móvil.

Como sabemos por

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_t + \vec{\omega} \wedge (O - C) \tag{32}$$

diferenciándola con respecto de t refiriéndonos a la terna fija en la hipótesis de ser $\vec{\omega} = cte$ se tendrá

$$\frac{d\vec{V}_0}{dt} = \frac{d\vec{V}_t}{dt} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{O}}{dt} = \frac{d\vec{V}_t}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_0 \tag{33}$$

debido a la (29) aplicada al vector $\vec{V}_0$ se tiene

$$\frac{d\vec{V}_0}{dt} = \frac{d_r\vec{V}_0}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_0 \tag{34}$$

nos dice: *que en un movimiento helicoidal uniforme, se tiene para cualquier centro de reducción vectores característicos constantes respecto de los ejes móviles.*

CAPITULO SETIMO

§ 1 Movimiento rígido alrededor de un punto fijo.

El movimiento de un sistema rígido S alrededor de un punto fijo O, se reduce a considerar el vector velocidad de uno cualquiera de los puntos del sistema tal como P respecto de un observador fijo en el espacio.

El vector

$$(1) \qquad P - O = \sum_{u\,1}^{3} \bar{\imath}_u x_u$$

tiene por derivada con respecto al tiempo

$$(2) \qquad \frac{\overline{dP}}{dt} = \frac{\overline{dO}}{dt} + \sum_{1\,u}^{3} \frac{d\bar{\imath}_u}{dt} x_u$$

por las fórmulas de Poisson

$$(3) \qquad \frac{d\bar{\imath}_u}{dt} = \bar{\omega} \wedge \bar{\imath}_u \qquad \text{por} \quad u = 1,2,3$$

entonces se tendrá

$$(4) \qquad \frac{\overrightarrow{dP}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dO}}{dt} + \overrightarrow{\omega} \wedge (P - O)$$

Cuando se considera como en el caso presente O fijo $\frac{\overrightarrow{dO}}{dt} = 0$ la anterior se reduce a la

$$(5) \qquad \frac{\overrightarrow{dP}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \wedge (P - O)$$

El eje $\overrightarrow{\omega}$ se denomina eje instantáneo de rotación y la longitud ω es la velocidad angular escalar, el vector $\overrightarrow{\omega}$ variará en general en cada instante.

La velocidad del punto P del sistema rígido será perpendicular al plano que pasa por el punto P y por el eje instantáneo de rotación, el plano normal en P a la trayectoria descrita por P pasa por el eje instantáneo.

Es independiente el tratar el movimiento de un sistema rígido alrededor de un punto fijo o de una figura esférica sobre su esfera y este último se puede reducir al estudio del movimiento de una figura plana sobre su plano, considerando que la esfera tenga radio infinito, pudiéndose pasar de uno a otro caso sustituyendo a la circunferencia máxima la recta, o sea, pasando de la trigonometría esférica a la plana.

Consideremos el movimiento de una figura esférica sobre su esfera. En un instante dado las circunferencias máximas normales a las trayectorias de los puntos de la figura en la posición actual de estos puntos, pasan todas por un mismo punto denominado *polo instantáneo.* De manera que el polo se podrá determinar cuando sean conocidas las trayectorias de dos puntos.

Para el estudio cuantitativo de la magnitud que caracteriza el movimiento de un sistema rígido alrededor de un punto fijo, es necesario determinar en cada instante su posición respecto de un sistema de referencia (terna).

La posición quedará determinada si se obtienen los valores de ciertos parámetros en función del tiempo, como son los nueve cosenos directores que definen la posición de la terna móvil $Ox_1x_2x_3$ rígidamente ligada al sistema móvil respecto de una terna considerada como fija $Oy_1y_2y_3$ (fig. 31).

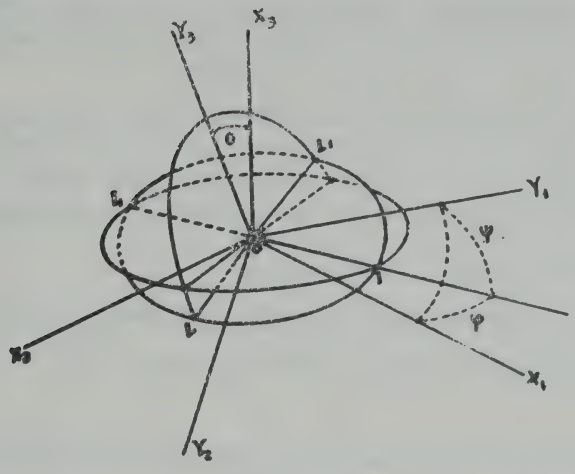


Fig. 31

Pero si se tiene en cuenta la complicación que presenta el problema usando los nueve cosenos directores, se facilita completamente la cuestión valiéndose de tres parámetros que los reemplazan denominados ángulos o parámetros de Euler y que pasaremos a estudiar.

En efecto tracemos el plano x_1x_2 de manera que determine con el plano y_1y_2 la intersección OI siendo a la vez perpendicular a Ox_3 y Oy_3. Será OI la semirecta según la cual un observador colocado según ella ve a Ox_3 hacia la derecha de Oy_3. Sea Ψ el ángulo que debe girar Oy_1 en el sentido positivo, de izquierna a derecha, respecto a un observador colocado a lo largo de Oy_3 para coincidir, con OI. Sea θ el ángulo que debe girar Oy_3 en el sentido ya indicado a lo largo de OI para coincidir con Ox_3 y sea φ el ángulo que debe girar OI en el sentido indicado respecto a Ox_1 para que coincida con Ox_1.

Cada posición de la terna móvil $Ox_1x_2x_3$ quedará completamente definida por dichos tres ángulos.

Lo contrario, dados los tres ángulos θ, φ, Ψ quedará unívocamente determinada la posición de la terna $Ox_1x_2x_3$.

En efecto: en el plano y_1y_2 se hará girar Oy_1 hacia Ox_1, un ángulo Ψ que difine OI en el plano normal a OI se hará girar Oy_3 de izquierda a derecha respecto de un observador colocado a lo largo de OI un ángulo θ siendo Ox_3 la recta obtenida; trazando por OI un plano normal a Ox_3 se hará girar OI en este plano, en el sentido positivo respecto de Ox_3 un ángulo φ obteniéndose Ox_1 y trazando Ox_2 de manera que forme con Ox_1 y Ox_3 una terna ortogonal quedará así determinada la terna móvil $Ox_1x_2x_3$ con respecto a la terna fija $Oy_1y_2y_3$ por los tres ángulos de Euler θ, φ, Ψ.

Téngase presente que para obtener todas las posiciones posibles de la terna móvil, bastará hacer variar los ángulos Ψ y φ de 0 a 2π y θ de 0 a π. Los tres parámetros que definen los ángulos de Euler tienen en especial las denominaciones siguientes:

θ — Angulo de nutación o inclinación.

Ψ — Angulo de precesión o longitud de la línea de los nodos OI.

φ — Angulo azimutal o de movimiento propio.

2. Pasaremos a encontrar las fórmulas que dan los ángulos de Euler.

El triángulo esférico AIB considerando el centro de la esfera en O y sobre la superficie de la esfera de radio 1 las proyecciones de A y B serán a y b entonces los vectores serán:

$$(A - O) = (a - O) + (A - a)$$

(6)

$$(B - O) = (b - O) + (B - b)$$

multiplicándolas escalarmente facilmente se obtiene

(7) $$\cos AB = \cos AI \cos BI + \operatorname{sen} AI \operatorname{sen} BI \cos (\widehat{AIB})$$

pero $$AB = a_1$$

$$AI = \Psi \qquad BI = \varphi \qquad \widehat{AIB} = 180^\circ - \theta$$

luego

$$\cos \alpha_1 = \cos \varphi \cos \Psi - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \Psi \cos \theta \tag{8}$$

para los triángulos formados con OI, Oy_1, Ox_2, y OI_1, Oy_1, Ox_3

$$\cos \alpha_2 = -\operatorname{sen} \varphi \cos \Psi - \cos \varphi \operatorname{sen} \Psi \cos \theta \tag{9}$$

$$\cos \alpha_3 = \operatorname{sen} \Psi \operatorname{sen} \theta \tag{10}$$

Para los triángulos que se obtengan cambiando y_1 en y_2 e y_3 se deducen las fórmulas

$$\begin{aligned} \cos \beta_1 &= \cos \varphi \operatorname{sen} \Psi + \operatorname{sen} \varphi \cos \Psi \cos \theta \\ \cos \beta_2 &= -\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \Psi + \cos \varphi \cos \Psi \cos \theta \\ \cos \beta_3 &= -\cos \Psi \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \cos \gamma_1 &= \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \gamma_2 &= \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \gamma_3 &= \cos \theta \end{aligned} \tag{12}$$

Las componentes del vector $\vec{\omega}$ según los ejes móviles $Ox_1x_2x_3$ que definen en un determinado instante el estado cinemático del sistema rígido, quedarán expresadas mediante los ángulos de Euler o por sus derivadas, tal estado cinemático puede considerarse siempre como resultante de tres estados cinemáticos de rotación alrededor de los ejes instantáneos OI, Oy_3, Ox_3.

Las velocidades angulares serán $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\Psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, representando por $\vec{\chi}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{\imath}$ los versores correspondientes, entonces el vector velocidad angular

$$\vec{\omega} = \vec{\chi}\frac{d\theta}{dt} + \vec{\jmath}\frac{d\Psi}{dt} + \vec{\imath}\frac{d\varphi}{dt} \tag{13}$$

Si $\vec{\imath}_u$ por $u = 1,2,3$ representan los versores fundamentales de la terna $Ox_1x_2x_3$ multiplicando escalarmente por $\vec{\imath}_1$ se tendrá:

$$\vec{\chi} \times \vec{\imath}_1 = \cos\varphi \qquad \vec{\imath} \times \vec{\imath}_1 = 0 \qquad \vec{\jmath} \times \vec{\imath}_1 = \cos\gamma_1 = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$$

asi se deduce que

$$\vec{\omega} \times \vec{\imath}_1 = p_1 = \frac{d\Psi}{dt} \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta + \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi$$

Análogamente se obtienen

$$\vec{\omega} \times \vec{\imath}_2 = p_2 = \frac{d\Psi}{dt}\cos\varphi \operatorname{sen}\theta - \frac{d\theta}{dt}\operatorname{sen}\varphi \tag{14}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{\imath}_3 = p_3 = \frac{d\Psi}{dt}\cos\theta + \frac{d\varphi}{dt}$$

Las componentes del vector $\vec{\omega}$ respecto a la terna fija $Oy_1y_2y_3$ se deducen multiplicando escalarmente por los versores fundamentales $\vec{\jmath}_u$ por $u = 1,2,3$. Así tendremos:

$$\vec{\omega} \times \vec{j_1} = q_1 = \frac{d\theta}{dt} \cos \Psi + \frac{d\varphi}{dt} \operatorname{sen} \Psi \operatorname{sen} \theta$$

$$\vec{\omega} \times \vec{j_2} = q_2 = \frac{d\theta}{dt} \operatorname{sen} \Psi - \frac{d\varphi}{dt} \cos \Psi \operatorname{sen} \theta \qquad (15)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{j_3} = q_3 = \frac{d\theta}{dt} \cos \theta + \frac{d\Psi}{dt}$$

3. Precesión regular.—Ya hemos estudiado el caso del movimiento de un sistema rígido S cuando se mantiene fijo un punto O se ha determinado que la imágen de tal movimiento se reduce a la rodadura sin deslizamiento de dos regladas, en este caso superficies cónicas de vértice común O (caso de Poinsot) que nos dice: El movimiento de un sistema rígido alrededor de un punto O se produce como si un cierto cono solidario al sistema dado que tiene su vértice en O ruede sin deslizamiento sobre un cono fijo del mismo vértice.

El caso especial es cuando el sistema rígido tiene un movimiento de rotación uniforme alrededor de un eje e solidario con él y que a su vez este eje tenga también un movimiento de rotación uniforme alrededor de otro eje fijo E. Se denomina *precesión regular*, al movimiento absoluto del sistema rígido S generado por el movimiento de arrastre del eje e alrededor del eje E y del movimiento relativo de S alrededor del eje e.

El eje E que está fijo en el espacio se llama *eje de precesión*. El eje de e fijo en el sistema rígido se llama *eje de figura* y el punto O se llama *polo* de la precesión.

La precesión estará definida cuando sea dado en el espacio y en el sistema rígido el polo O y sea dado el vector velocidad angular de los dos movimientos generadores, el uno constante en el espacio y el otro constante en el sistema rígido.

Representemos por $\vec{\omega_1}$ el vector velocidad angular de S alrededor del eje e y $\vec{\omega_2}$ el vector velocidad angular del eje e alrededor de E, entonces el vector velocidad angular correspondiente al movimiento de rotación de la precesión regular será:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \tag{16}$$

que nos dice: En una precesión regular el vector velocidad angular en un instante, es la suma geométrica de dos vectores de longitud constante, el uno solidario al sistema rígido y el otro fijo en el espacio.

La precesión regular se caracteriza porque el paralelógramo de $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$ supuestos aplicados en O se conserva inalterable en su configuración al rotar uniformemente alrededor de uno de sus lados, debido a la constancia de $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$ el producto escalar

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 = \omega_2 \, \omega_2 \cos (\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2) \tag{17}$$

tambien se conservará constante.

La diagonal del paralelógramo será en cada instante la línea de acción de la velocidad angular $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ de la precesión regular o sea el respectivo eje del movimiento, que se mantiene inclinado en un ángulo constante respecto a y_3 como a x_3; entonces en una precesión regular los conos de Poinsot son rotantes.

La precesión regular en la cual $\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \neq 0$ puede ser denominada *positiva* o *negativa* o tambien *progresiva* o *retrógrada* según que la constante sea positiva o negativa, es decir que $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$ formen ángulos agudo ú obtuso. La precesión progresiva se caracteriza por ser el cono móvil exterior al cono fijo y la precesión retrógrada por ser el cono móvil interior al cono fijo. En el primer caso la componente de uno de los vectores $\vec{\omega}_1$ o $\vec{\omega}_2$ sobre el otro tendrá el mismo sentido, en el segundo caso tendrá sentido opuesto lo que explica por que se les denomina progresiva y retrógrada.

Cuando el ángulo $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2) = \frac{\pi}{2}$ la precesión se puede considerar independientemente como progresiva o retrógrada.

Obsérvese que la precesión regular de dos conos rotantes de Poinsot puede presentar tres casos: 1°. Que el cono móvil sea exterior al cono fijo; 2°. Que el cono móvil sea interior al cono fijo; 3°. Que el cono fijo sea interior al cono móvil.

Ecuaciones de la precesión regular.—Sean los vectores

$$(18) \qquad \vec{\omega}_1 = \vec{b}_1\,\omega_1 \qquad \vec{\omega}_2 = \vec{b}_2\,\omega_2$$

referidos a los sistemas de ejes, ternas ortogonales $Oy_1y_2y_3$ fija y $Ox_1x_2x_3$ móvil correspondiendo el eje y_3 al eje del cono fijo y el eje x_3 al eje del cono móvil, el ángulo $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2) = \theta_0 = y_3\widehat{O}x_3$ y el ángulo de precesión $\Psi = y_3\widehat{O}I$.

En las ecuaciones de Euler (n°. 2) corresponden

$$(19) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_1 \qquad \frac{d\Psi}{dt} = \omega_2$$

integrándolas se obtiene

$$(20) \qquad \theta = \theta_0 \qquad \varphi = \omega_1 t + \varphi_0 \qquad \Psi = \omega_2 t + \Psi_0$$

siendo θ_0, φ_0, Ψ_0 los valores iniciales de los ángulos de Euler.

4 Precesión regular de la Tierra.—Estudiaremos el movimiento de la Tierra alrededor de su centro, que gira uniformemente alrededor de su eje x_3 (eje polar) en el sentido antihorario o sea de Oeste a Este), verificándose una rotación completa en un día sideral y no conservando el eje polar x_3, dirección invariable respecto a las estrellas fijas, girando a la vez uniformemente pero con extrema lentitud alrededor de una recta y_3 de dirección fija en el espacio, pasando por el centro O del planeta, la cual puede caracterizarse como ortogonal al plano de la eclíptica orientado hacia el polo norte ON, entonces el ángulo constante mínimo de los dos rectas x_3 con y_3 será de 23°28′. Manteniéndose este ángulo, el eje de la Tierra x_3 gira alrededor de y_3 uniformemente en sentido contrario al que se verifica la rotación terrestre, en el sentido horario (Este a Oeste) verificándose en el período de cerca de 26 000 años sidera-

les que también llevan el nombre de años platónicos. Al mismo tiempo la Tierra gira alrededor de su eje x_3 verificándose una rotación completa en 24 horas.

En la precesión terrestre el cono móvil es interior al cono fijo, precesión retrógrada. Como se observa la Tierra estará animada alrededor de O de una precesión regular, fenómeno que los astrónomos denominan la *precesión de los equinoccios.*

Tomando como unidad de tiempo el día (24 horas) se tendrán las componentes de $\vec{\omega}$

$$\omega_1 = 2\pi \qquad \omega_2 = \frac{2\pi}{365 \times 26\,000} \tag{21}$$

la relación $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ es pequeñísima, el ángulo de precesión estará dado por

$$\operatorname{tang} \widehat{\omega O x_3} = \frac{\operatorname{sen} (23°.28')}{\cos (23°.28') + 365 \times 26\,000} \tag{22}$$

aproximadamente

$$\widehat{\omega O x_3} = 0''.00867$$

que es el valor del ángulo de precesión.

La precesión de la Tierra si se considera solamente la rotación diurna y la precesión de los equinoccios estará determinada por la rodadura de un cono móvil cuya abertura angular es $2 \times 0'',00867$ invariablemente unido a la Tierra sobre la cara interior de un cono fijo de abertura $2 \times 23°.28'$.

CAPITULO OCTAVO

§ 1 Reglada Rodante

1 Si al verificarse un movimiento rígido de un sistema S durante un intervalo finito de tiempo el vector característico $\vec{\omega} = 0$ el movimiento será una traslación pura, que como ya sabemos, todos los puntos del sistema S describen con la misma ley trayectorias congruentes y en este caso el movimiento será conocido cuando se conozca la trayectoria de un punto de S y la ley según la cual dicha trayectoria es recorrida.

Si $\vec{\omega} \neq 0$ se podrá entonces obtener una representación geométrica del movimiento rígido, ya sabemos que en cada instante existe un eje e tal que el cambio de posición del sistema S de la posición relativa que ocupa en el instante t a la que ocupa en el instante $t + dt$ se obtiene asociando a una rotación elemental $\vec{\omega}\, dt$ alrededor del eje e una traslación elemental $\vec{V}_0 dt$ a lo largo del mismo eje e.

El eje e naturalmente varía en cada instante y las sucesivas posiciones con respecto a la terna de referencia fija será una superficie reglada Ω_1 que denominaremos simplemente *reglada fija* y las posiciones de dicho eje con respecto a la terna movil será otra superficie reglada Ω que denominaremos *reglada móvil* (fig. 32).

En un determinado instante ambas regladas Ω_1 y Ω tendrán una generatriz común constituída por el eje e del movimiento relativo, en tal instante vamos a demostrar que las dos regladas están en contacto a lo largo del eje del movimiento, o sea en un punto de la generatriz común las dos regladas tienen un mismo plano tangente.

Consideremos sobre la reglada móvil Ω una curva c la cual en la vecindad del eje e del movimiento, corte a la generatriz de Ω en un solo punto y consideremos que este punto se mueve a lo largo de la curva c de manera de encontrarse en cada instante sobre el eje del movimiento relativo en el mismo instante.

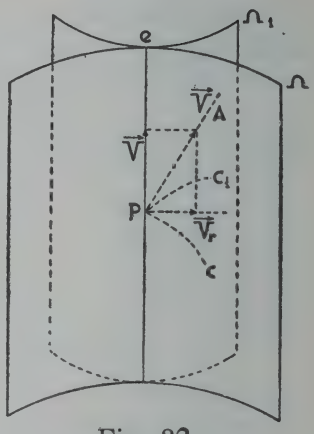


Fig. 32

Este punto móvil respecto a la terna fija parecerá moverse sobre la reglada Ω_1 sobre la cuál describirá una curva c_1. Si en un instante genérico se fija el eje del movimiento y la posición del punto P móvil, sea $\vec{V}_r$ la velocidad vectorial relativa del punto P, $\vec{V}_a$ la velocidad vectorial de arrastre y $\vec{V}_A$ la velocidad vectorial absoluta, en virtud del principio del movimiento relativo se tendrá

$$\vec{V}_A = \vec{V}_r + \vec{V}_a \tag{1}$$

$\vec{V}_a$ es el vector velocidad que tendría el punto P si estuviese rígidamente ligado al sistema móvil S. Pero el punto del sistema S pertenece en un instante dado al correspondiente eje del movimiento, deslizandose simplemente a lo largo del mismo eje, cuando la velocidad de arrastre V_a está dirigida según el eje e.

La velocidad relativa $\vec{V}_r$ a la vez está dirigida según la tangente a la curva c y la velocidad absoluta $\vec{V}_A$ según la tangente a la curva c_1.

Debido a la (1) el eje e y las dos tangentes consideradas anteriormente deben pertenecer a un mismo plano.

Pero el plano determinado por el eje e y la tangente a la c es tangente a la reglada Ω en el punto P, el plano determinado por el eje e y la tangente a c_1 es tangente a la reglada Ω_1 en el punto P.

Las dos regladas tendrán pués en el punto P el mismo plano tangente. Se observa por lo expresado que el movimiento en el sistema S se puede tratar como si la reglada Ω rígidamente ligada a S, estuviese animada de un movimiento de rodadura sobre la reglada fija Ω_1 acompañada de un desligamiento o lo largo de la generatriz común.

O bien se puede decir que el movimiento de estas dos regladas es la imágen del movimiento del sistema S.

Para realizar un movimiento rígido basta suponer ligado el sistema móvil a la reglada móvil Ω y hacer rodar esta última sobre la correspondiente reglada fija Ω_1 acompañada la rodadura con un conveniente deslizamiento.

Es de especial interés el caso en que las dos regladas ruedan una sobre la otra sin deslizamiento. En este caso en un intervalo de tiempo finito se tiene

$$\vec{V}_0 \times \vec{\omega} = 0$$

niendo $\vec{V}_0$ y $\vec{\omega}$ los vectores característicos del movimiento rígido.

Excluyendo el caso que $\vec{\omega} = 0$ o sea una traslación pura, ya hemos tratado en la página 266, que la condición ya expresada se verifica en el movimiento de un sistema rígido dotado de un punto fijo O y en el movimiento de un sistema rígido, cuyos puntos se mueven paralelamente a una dirección plana fija.

En el primer caso el eje del movimiento pasa constantemente por el punto fijo O y las dos regladas Ω y Ω_1 son en tal caso dos conos con sus vértices en O, que es el teorema de Poinsot, que nos dice: *El movimiento de un sistema rígido dotado de un punto fijo tiene por imágen la rodadura de un cono Ω rígidamente ligado al sistema móvil sobre el cono fijo Ω_1.*

En el caso especial del movimiento plano, el eje del movimiento será siempre normal al plano fijo H, las regladas Ω y Ω_1 serán entonces dos superficies cilíndricas y el movimiento del sistema tendrá por imágen la rodadura de Ω sobre Ω_1 sin desligamiento. Como podemos cortar el sistema rígido por un plano paralelo al plano H, podremos considerar el movimiento del plano de la figura plana F determinada por la interseccion, con respecto al plano fijo H. Re-

presentemos por I e I_1 la intersección de las regladas Ω y Ω_1 con el plano de F, se tendrá el *teorema de Cauchy.*

El movimiento de una figura rígida plana F en su plano, cuando no se trata de una traslación. tiene por inágen como si la curva I rígidamente ligada a F girase sin deslizarse sobre la curva fija I_1.

La curva I_1 se denomina *base* y la curva *I ruleta,* ambas sin trayectorias polares de que trataremos después.

2. Movimiento de una figura plana en su plano.—Consideremos dos puntos P_u $u = 1,2$ de una figura plana móvil en su plano.

Para la velocidad vectorial $\overrightarrow{V_1}$ del punto P_1 del sistema rígido plano se tiene la expresión fundamental

$$\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{\omega} \wedge (P_1 - O) \tag{2}$$

que vale para todo movimiento rígido con la obseavación que ahora los vectores $\overrightarrow{V_1}$ y $\overrightarrow{V_0}$ y $P_1 - O$ pertenecen al plano del movimiento mientras que el vector $\overrightarrow{\omega}$ le es normal.

Propongámonos estudiar en cada instante cuales son los puntos del plano móvil en que se encuentra la figura plana a los cuales corresponde velocidad nula.

Suponiendo $\overrightarrow{\omega} \neq 0$ como también se tiene para P_2

$$\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{\omega} \wedge (P_2 - O) \tag{3}$$

restando las (2) y (3) se obtiene

$$V_1 = V_2 + \overrightarrow{\omega} \wedge (P_1 - P_2) \tag{4}$$

Como $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\chi}\omega$ el símbolo $\overrightarrow{\chi} \wedge = i = \pm \sqrt{-1}$ véase página 42, que es un símbolo funcional u operador que produce un giro de un

ángulo recto en un sentido determinado a todo vector normal al versor $\overrightarrow{\chi}$ en tal virtud se tendrá

$$\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_2} + i\,\omega\,(P_1 - P_2) \tag{5}$$

o bien

$$P_1 + \frac{1}{\omega}\, i\, \overrightarrow{V_1} = P_2 + \frac{1}{\omega}\, i\, \overrightarrow{V_2} = C \tag{6}$$

el punto C así definido será función del tiempo t y será independiente del punto P_1 de la figura plana.

De la ecuacion anterior se despeja

$$\overrightarrow{V_1} = i\,\omega\,(P_1 - C) \tag{7}$$

Nos dice: que en el instante t el movimiento de la figura plana es una rotación alrededor del punto C del plano, ω es la velocidad angular instantánea, las normales a las trayectorias de los diversos puntos de la figura plana en el instante t pasan por el punto C que se denomina *centro instantáneo de rotación o polo.*

Volviendo a diferenciar con respecto al tiempo t la ecuación (5) se tendrá las aceleraciones

$$\overrightarrow{J_1} = \overrightarrow{J_2} + i\,\frac{d\omega}{dt}\,(P_1 - P_2) + i\,\omega\,(\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}) \tag{8}$$

o bien

$$\overrightarrow{J_1} = \overrightarrow{J_2} + \left\{ i\,\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 \right\} (P_1 - P_2) \tag{9}$$

haciendo

(10) $$\omega^2 - r\cos\theta$$

(11) $$\frac{d\omega}{dt} = r\,\text{sen}\,\theta$$

evidentemente será

(12) $$\omega^2 - i\frac{d\omega}{dt} = -re^{i\theta}$$

luego se deduce que

(13) $$\overrightarrow{J_1} = \overrightarrow{J_2} + re^{i\theta}(P_1 - P_2)$$

es evidente que

(14) $$P_1 - \frac{1}{r}e^{i\theta}\overrightarrow{J_1} = P_2 - \frac{1}{r}e^{i\theta}\overrightarrow{J_2} = 0$$

el punto O depende del tiempo t siende independiente del punro P_1 de la figura, al punto O se le denomina *centro de aceleraciones*, luego:

(15) $$\overrightarrow{J_1} = re^{i\theta}(P_1 - O)$$

como

$$\overrightarrow{J_1} = \overrightarrow{\tau}\,J_1$$

cuando $J = cte$ se tendra tambien mod $(P_1 - O) = cte$ es decir que los puntos que en el instante r tienen una aceleración de magnitud constante estarán situadas en círculos que tienen por centro el centro de aceleraciones.

Si la figura plana se mueve de tal manera que los puntos P_u por $u = 1,2$ que definen el segmento P_1P_2 resbalan según dos ejes

perpendiculares. Ox_1 Ox_2 las normales en los puntos P_1 y P_2 a los ejes determinan en su intersección C el centro instantáneo de rotación en la posición que tiene en ese instante la figura. Si representamos por P_3 otro punto de la figura considerado en el segmento P_1P_2 (recta de marca) la CP_3 será normal a P_3T tangente a la trayectoria que describe el punto P_3 cuando la figura se mueve.

Consideremos que se conozca la velocidad del punto P_3

$$V_3 = \omega . CP_3$$

y se desea conocer la velocidad del otro punto P_4

$$V_4 = \omega . CP_4$$

de las anteriores se deduce

$$V_4 = V_3 . \frac{CP_3}{CP_4} \tag{16}$$

3 Movimiento de una figura plana en su plano.—Consideremos una figura plana S que se mueve en su plano H en la que se tenga un sistema de referencia cartesiano fijo Oy_1y_2 y otro sistema de referencia móvil Ix_1x_2 solidario con la figura S. (fig. 33)

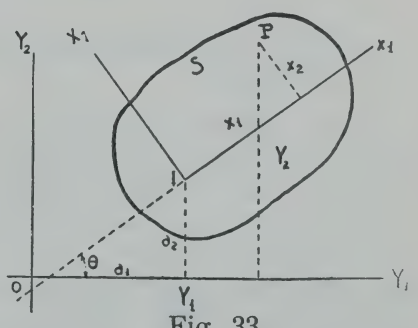


Fig. 33

Es claro que respecto a estos sistemas de referencia las coordenadas y_3 y x_3 de cualquiera de los puntos de la figura móvil serán nulas.

Sean $\bar{\jmath}_u$ por $u = 1,2$ los versores fundamentales del sistema Oy_1y_2 y $\bar{\imath}_u$ por $u = 1,2$ los versores fundamentales del sistema Ix_1x_2. Para un punto cualquiera P de la figura S las coordenadas vectoriales serán:

$$P - O = \sum_{1}^{2} \bar{\jmath}_u \, y_u \tag{17}$$

(18) $$P - I = \sum_{1}^{2}{}_{u} \bar{\imath}_u x_u$$

denominando a_u por $u = 1,2$ las coordenadas del punto I respecto al sistema fijo se tendrá:

(19) $$I - O = \sum_{1}^{2}{}_{u} \bar{\jmath}_u a_u$$

Si representamos por θ el ángulo que forman los ejes Ix_1 con Oy_1 la velocidad angular será $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ y el vector velocidad angular es $\vec{\omega} = \bar{\imath}_3 \omega$

Las componentes de este vector se obtienen de las fórmulas (93) página 239 reduciéndose a la

(20) $$p_3 = \bar{\imath}_2 \times \frac{d\bar{\imath}_1}{dt} = \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Para la velocidad vectorial $\vec{V}$ de un punto S se tiene la expresión fundamental

(21) $$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge (P - I)$$

que vale para todo movimiento rígido, con la observación que ahora los vectores $\vec{V}$ y $\vec{V}_0$ así como $P - I$ pertenecen al plano del movimiento, mientras que el vector $\vec{\omega}$ le es normal.

Propongámonos estudiar en cada instante cuales son los puntos del plano móvil a los cuales les corresponde velocidad nula.

Suponiendo que $\vec{\omega} = 0$ representemos por C un eventual punto que satisfaga a la condición anterior, entonces será

$$\vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge (C - I) = 0 \tag{22}$$

multiplicando vectorialmente por $\vec{\omega}$ se tiene

$$\vec{\omega} \wedge \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (C - I)] = 0 \tag{23}$$

teniendo presente que los vectores $\vec{\omega}$ y $C - I$ son ortogonales, por la fórmula del doble producto vectorial se tendrá

$$\vec{\omega} \wedge \vec{V}_0 = \omega^2 (C - I) \tag{24}$$

de la cual se deduce que

$$C = I + \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \wedge \vec{V}_0) \tag{25}$$

El punto I y los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{V}_0$ son unívocamente determinados. Cuando la ecuación obtenida que define el movimiento rígido plano existe en un solo punto el cual en el instante t tiene la velocidad nula, a tal punto es el que se le denomina *polo* o *centro instantáneo de de rotación.*

Sean y_1 é y_2 las coordenadas del punto C respecto a los ejes fijos y sean x_1 y x_2 las coordenadas del mismo punto C respecto a los ejes móviles, siendo a_1 y a_2 las coordenadas del orígen I respecto al sistema fijo. Las componentes del vector $\vec{V}_0$ respecto a los ejes fijos serán $\frac{da_1}{dt}$ y $\frac{da_2}{dt}$ y las componentes de $\vec{V}_0$ respecto a los ejes móviles serán V_1 y V_2.

Las componentes del vector velocidad angular $\vec{\omega}$ debido a su orientación serán $O,\ O,\ \frac{d\theta}{dt}$ tanto respecto a los ejes móviles como a los ejes fijos.

Proyectando ahora la

$$C = I + \frac{1}{\omega^2}(\vec{\omega} \wedge \vec{V_0}) \tag{26}$$

sobre los ejes fijos se obtienen las

$$y_1 = a_1 - \frac{\frac{da_1}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} \qquad y_2 = a_2 + \frac{\frac{da_2}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} \tag{27}$$

Proyectando sobre los ejes móviles

$$x_1 = -\frac{V_1}{\frac{d\theta}{dt}} \qquad x_2 = \frac{V_2}{\frac{d\theta}{dt}} \tag{28}$$

Eliminando el tiempo entre las ecuaciones (27) se obtiene la ecuación de la *base* y eliminando el tiempo entre las ecuaciones (28) se tiene la ecuación de la *ruleta*.

§ 4 Trayectorias polares. Base y Ruleta. Teoremas de Cauchy y de Chasles.

Como el centro instantáneo de rotación en general varía con tiempo puesto que sus coordenadas son funciones del tiempo.

El lugar geométrico de las diversos posiciones que dicho centro instantáneo ocupa sobre el plano fijo se denomina *polar fija o base B*, y el lugar geométrico de las posiciones ocupadas por el centro instantáneo de rotación sobre el plano móvil se denomina *polar móvil o ruleta R.*

Para encontrar la ecuación de la *base* bastará eliminar el tiempo en las ecuaciones (27) y la ecuación de la *ruleta* se obtendrá eliminando el tiempo entre las (28).

En general no es necesario recurrir al cálculo para encontrar la ecuación de la trayectoria *base* y *ruleta,* será suficiente recurrir a una propiedad del centro instantáneo de rotación que daremos después.

Como en cada instante las dos trayectorias *base* y *ruleta* tienen un punto común que es el centro instantáneo de rotación relativo a ese instante. Veamos ahora que en el punto común las dos trayectorias tienen la misma tangente.

En efecto, si consideramos un punto móvil P, que en el plano fijo en cada instante ocupa la posición correspondiente al centro instantáneo de rotación, su trayectoria sobre el plano fijo será la *base B* y sobre el plano móvil su trayectoria será la *ruleta R.*

El vector velocidad absoluta es $\overline{V}_A$, el vector velocidad relativa será $\overline{V}_r$ y el vector velocidad de arrastre es $\overline{V}_a$ en virtud del principio del movimiento relativo se tendrá

$$\overline{V}_A = \overline{V}_r + \overline{V}_a \tag{29}$$

$\overline{V}_a$ es el vector velocidad con que se moverá el punto P como si estuviese rígidamente ligado al plano móvil.

Pero P ocupa en cada instante la posición que corresponde en el mismo instante al centro instantáneo de rotación I o sea un punto de velocidad nula esto es $\overline{V}_a = 0$ entonces la (29) se reduce a la

$$\overline{V}_A = \overline{V}_r \tag{29'}$$

y como sabemos que el vector velocidad de un punto está dirigido según la tangente a la trayectoria, la (29′) nos conduce a la conclusión que la tangente a la *base B* en el punto *I* coincide con la tangente de la *ruleta R* en el mismo punto.

La (29′) determina, también, la igualdad de los relativos corrimientos elementales, cuando durante el movimiento la *ruleta rueda sin resbalar sobre la base* como lo demuestra el *teorema de Cauchy.*

Las ecuaciones (21) y (22) restada la una de la otra nos dá:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge (P - I) \tag{30}$$

que por la definición de producto vectorial el vector $\vec{V}$ será normal a la recta PI y por consiguiente normal también a la trayectoria en el punto P que nos demuestra también el *teorema de Chasles.* Se deduce que *las normales a la trayectoria de varios puntos de la figura móvil, todas pasan por el centro instantáneo de rotación.*

Cuando el centro instantáneo de rotación se encuentre a una distancia infinita el movimiento de la figura móvil será una traslación puesto que las normales serán paralelas.

Los vectores $\vec{\omega}$ y $(P - O)$ son ortogonales y la ecuación vectorial (30) tiene por valor absoluto.

$$V = \omega \, . \, PI \tag{31}$$

De la que se deduce: *que las velocidades de los distintos puntos de la figura móvil son praporcionales a las distancias al centro instantáneo de rotación.*

Como

$$\vec{V} = \frac{\vec{dP}}{dt}$$

o bién

(30) $$\overrightarrow{dP} = \overrightarrow{V}\,dt = \overrightarrow{\omega}\,dt \wedge (P - I)$$

que nos dice: el corrimiento elemental $\overrightarrow{dP}$ tiene un caracter permanente rotatorio cuyo modulo es $\omega dt \,.\, PI$.

§ 5 Perfiles Conjugados.

Cuando se mueve una figura rígida S en su plano, podemos considerar una curva plana c solidaria con dicha figura. Al moverse la figura S la curva será arrastrada por ella ocupando sucesivamente una serie de posiciones, de manera que la curva móvil c admitirá una envolvente E determinándose así el *perfil conjugado* de la curva c. Como se sabe la curva móvil c deberá ser siempre tangente con E, variando por consiguiente el punto de contacto P en cada instanté. Obsérvese entonces que las curvas c y E se pueden considerar con movimiento, recíprocas de tal manera que c sea la envolvente de E considerada ahora como móvil. Lo expresado justifica la denominación de *perfiles conjugados.*

La normal común a la curva c y a la E en el mismo punto de contacto P pasará en cada instante por el correspondiente centro instantáneo de rotación (sea eso propio o impropio). Si P coincide con C el hecho es manifiesto. En el caso general en el que P sea distinto de C habrá que recurrir al criterio del movimiento relativo, haciendo intervenir la velocidad vectorial relativa $\overrightarrow{V_r}$ de P que corresponde a la curva c (que se interpretará como la velocidad relativa atendiendo a la imágen del movimiento de la figura S respecto a los ejes fijos o sea de c respecto a E) siendo su velocidad absoluta vectorial $\overrightarrow{V_A}$ (velocidad absoluta concerniente al corrimiento sobre E). Cuando c y E se tocan $\overrightarrow{V_A}$ y $\overrightarrow{V_r}$ tendrán por dirección la tangente común. Lo mismo acontece con la diferencia $\overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{V_a}$ velocidad vectorial de arrastre del punto P este último vector es ortogonal con CP de donde se deduce que CP coincide en dirección con la normal común a los dos perfiles.

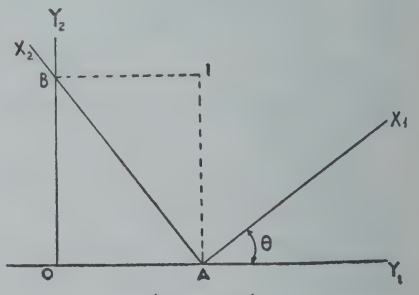
En el caso límite de una traslación (C estará a una distancia infinita) entonces la velocidad de arrastre vectorial coincide con la tangente al perfil que determina la dirección de la traslación.

En el caso particular que el perfil solidario c se reduzca a un punto P_0, o bién para hacer mas expresiva la cuestión si consideramos una circunferencia infinitésima entorno del punto P_0. La envolvente E se identificará con la trayectoria de P_0 el punto de contacto P de c y de E coinciden en cada instante con la posición de P en aquel instante y la normal cemún al perfil con la normal a la trayectoria.

§ 6 Movimiento de un segmento de recta rígido cuyos extremos tienen por trayectorias dos rectas ortogonales.

Sea un segmento de recta rígido cuyos extremos recorren a lo largo de dos rectas ortogonales.

Consideremos como ejes fijos las dos rectas ortogonales Oy_1 Oy_2 y sean los ejes móviles determinados por la recta AB y la perpendicular en A siendo este punto el orígen y los ejes móviles Ax_1 é Ax_2 (como en la página 281.)



(Fig. 34)

Representemos por D la longitud del segmento AB, las coordenadas de I respecto al sistema fijo serán:

$$(33) \qquad a_1 = D \operatorname{sen} \theta \qquad a_2 = 0$$

diferenciándolas respecto del tiempo tendremos

$$(34) \qquad \frac{da_1}{dt} = D \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{da_2}{dt} = 0$$

Las coordenadas del centro instantáneo de rotación son

$$(35) \qquad y_1 = D \operatorname{sen} \theta \qquad y_2 = D \cos \theta$$

Para encontrar la ecuación de la base bastará eliminar θ entre las ecuaciones anteriores, en efecto

$$(36) \qquad y_1^2 + y_2^2 = D^2$$

que es una circunferencia de radio D y de centro O.

Las componentes del vector velocidad $\overline{V_0}$ según los ejes móviles serán:

$$(37) \qquad \begin{cases} V_{x_1} = \dfrac{da_1}{dt} \cos \theta + \dfrac{da_2}{dt} \cos \theta \\ V_{x_2} = -\dfrac{da_1}{dt} \operatorname{sen} \theta + \dfrac{da_2}{dt} \cos \theta \end{cases}$$

Las coordenadas del centro instantáneo de rotación respecto de los ejes móviles serán

$$(38) \qquad x_1 = D \cos \theta \operatorname{sen} \theta \qquad x_2 = D \cos^2 \theta$$

eliminando θ se obtendrá la ecuación de la *ruleta*.

$$(39) \qquad x_1^2 + \left[x_2 - \frac{D}{2}\right]^2 = \left[\frac{D}{2}\right]^2$$

que es una circunferencia de radio $\dfrac{D}{2}$ y su centro es el punto medio de AB.

El movimiento estudiadp tiene la importancia que permite construír un instrumento para trazar una elipse por movimiento contínuo denominado *Elipsógrafo.* (Fig. 35)

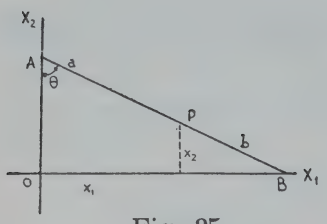


Fig. 35

Un punto P cualquiera de la recta AB que dista a y b de los extremos A y B referido al sistema de ejes cartesianos Ox_1 Ox_2 tiene por coordenadas

(40) $\qquad x_1 = a \operatorname{sen} \theta \qquad x_2 = b \cos \theta$

eliminando θ se tiene

(41) $$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

que es una elipse referida a sus ejes.

4 Antiparalelógramo Articulado.—Sea el cuadrilátero (fig. 36) cuyos vértices sean A, B, C, D, de manera que los lados $AB = CD$ y $AC = BD$. Al sistema definido así se le denomina *antiparalelógramo articulado* porque si se imagina que el triángulo ACD que gira alrededor de AD de manera que quede rebatido sobre el plano de la figura se obtendrá un paralelógramo.

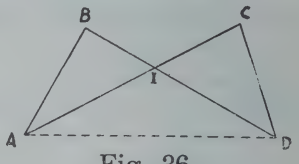


Fig. 36

Permaneciendo fija la recta AB, moviéndose la figura de manera que CD sea móvil, se trata de determinar cual es la base y cual la ruleta y obsérvese que por la invariabilidad de las rectas los puntos C y D describirán circunferencias de centro A y B, las normales en C y D serán CA y DB. Debido al teorema de Chasles el centro instantáneo de rotación I se encontrará en el punto de intersección de AC y BD. Por la igualdad de los triángulos ABD y ACD en un instante el ángulo $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. De la igualdad de los triángulos IAB e IDC se deduce que $IA = ID$ o bien

$$IA + IB = ID + IB = BD$$

(42)

$$IC + ID = IC + IA = AC$$

Es decir que durante todo el movimiento la suma de las distancias del centro instantáneo de rotación de los puntos A y B y de los puntos C y D es constante y por lo tanto las dos trayectorias base y ruleta serán dos elipses iguales, la una tiene por focos los puntos fijos A y B y la otra los puntos C y D.

La imágen del movimiento de la recta CD será la rodadura sin deslizamiento de una elipse móvil (ruleta) sobre una elipse fija (base).

§ 7 Fórmula de Savary

Sea una curva s ligada a una figura móvil y s_1 la curva envolvente de las posiciones sucesivas de s (trayectorias polares, sean C y C_1 los respectivos centros de curvatura e I el centro instantáneo de rotación, $\vec{\omega}$ el vector velocidad angular que define el estado cinético de rotación.

Durante un intervalo muy pequeño de tiempo sean P_1 y P_2 los puntos de s y s_1 que se encuentran en contacto y que se pueden obtener haciendo girar la curva s alrededor de C de manera que P_1 coincida con P_2. Se demuestra en buena cuenta que el estado cinético de la figura equivale al resultante de dos estados cinéticos de rotación, teniendo como centros respectivamente C y C_1. Si representamos dichas dos rotaciones por los vectores velocidad angular $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$ podremos establecer las condiciones de equivalencia

(43) $$\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}$$

(44) $$(C - I) \wedge \vec{\omega}_1 + (C_1 - I) \wedge \vec{\omega}_2 = 0$$

Multiplicando la (43) por $(C - I)$ vectorialmente se tiene

$$(45) \qquad (C - I) \wedge \vec{\omega_1} + (C - I) \wedge \vec{\omega_2} = (C - I) \wedge \vec{\omega}$$

restando con la anterior

$$(46) \qquad [(C - I) - (C_1 - I)] \wedge \vec{\omega_1} = (C - I) \wedge \vec{\omega}$$

introduciendo los versores $\vec{\tau}, \vec{\eta}, \vec{b}$ paralelos respectivamente a los vectores

$$(47) \qquad (C_1 - I) \wedge \vec{\omega_1} \qquad (C_1 - I) \qquad \vec{\omega}$$

tales que $\vec{\tau} = \vec{\eta} \wedge \vec{b}$ y representando por r_1, r las distancias de C_1 y C a I la ecuación precedente podra ser escrita así

$$(48) \qquad (\mp r - r_1)\, \vec{\eta} \wedge \vec{\omega_1} = \pm r \vec{\eta} \wedge \vec{\omega} = \pm r\, \omega \vec{\tau}$$

Corresponderá el signo + ó — según que C esté de un mismo lado o del lado opuesto de C_1 respecto de I. Ahora si denominamos $\vec{\mu}$ la velocidad vectorial de I en el primero de los dos estados cinéticos considerados resultará

$$(49) \qquad \vec{\mu} = (C_1 - I) \wedge \vec{\omega_1} = r_1 \vec{\eta} \wedge \vec{\omega}$$

por consiguiente se tendrá

$$(50) \qquad (\pm r - r_1) \frac{\vec{\mu}}{r_1} = \pm r \omega \vec{\tau}$$

o bien

$$\vec{\omega}\,\vec{\tau} = \left(\frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r}\right)\vec{\mu} \tag{51}$$

de donde

$$\vec{\omega} = \left(\frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r}\right)\vec{\mu} \tag{52}$$

podrá atribuirse a μ el signo positivo cuando los vectores $\vec{\mu}$ y $\vec{\tau}$ (que son paralelos) tengan el mismo sentido y negativo cuando tengan sentido contrario.

En el caso particular que las curvas s y s_1 coincidan con las curvas σ y σ_1 r y r_1 serán los radios de curvatura ρ y ρ_1 y el vector $\vec{\mu}$ será entonces el vector $\vec{V}$, así se tendrá:

$$\vec{\omega} = \vec{V}\left(\frac{1}{\rho} \pm \frac{1}{\rho_1}\right) \tag{53}$$

Comparándola con la anterior (52) se tiene

$$\left(\frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r}\right)\vec{\mu} = \left(\frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho}\right)\vec{V} \tag{54}$$

Entre las velocidades μ y V existe una relación simple que pasaremos a determinar. En efecto eligiendo el sistema de ejes $C_1 x_1$, $C_1 x_2$ paralelos respectivamente a los versores $\vec{\tau}$ y $\vec{\eta}$ y que sean móviles de modo que C_1 siempre coincida con el centro de curvatura de s_1 y $C_1 x_2$ coincida con la normal a s_1 en el punto P. La velocidad de arrastre de C_1 cuando C_1 está ligado al sistema de ejes está representada por el vector $\vec{\mu}$. Ahora con respecto al sistema de ejes fijos el punto C_1 recorre la línea σ_1 y $\vec{V}_r$ será el vector velocidad relativa, es decir la velocidad de C_1 respecto al sistema de ejes mó-

viles, cuando C_1 recorre la línea σ_1, velocidad dirigida según C_2x_2 hacia I. La velocidad absoluta será

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{\mu} \tag{55}$$

Multiplicando escalarmente por el versor $\vec{\tau}$ se tiene

$$\vec{\tau} \times \vec{V} = \vec{\tau} \times \vec{\mu} \tag{56}$$

de la cual se deduce

$$V \cos \varphi = \mu \tag{57}$$

siendo φ el ángulo que forman la normal positiva IC_1 con IO_1.

La ecuación (57) permite escribir la (54) en la forma siguiente:

$$\left\{\frac{1}{r_1} \mp \frac{1}{r}\right\} \cos \varphi = \left\{\frac{1}{\rho_1} \mp \frac{1}{\rho}\right\} \tag{58}$$

que es la fórmula de Savary, esta fórmula permite calcular r conociendo φ y r_1 o sea encontrar el centro de curvatura de s que tiene por envolvente la curva s_1, o la trayectoria de un punto P cuando se suponga la curva s reducida a este punto.

§ 8 Interpretación geométrica de Savary

Obsérvese que la ecuación (58) se puede escribir así:

$$r\left\{\frac{r_1}{\rho_1} - \cos \varphi\right\} = r_1\left\{-\frac{r}{\rho} + \cos \varphi\right\} \tag{59}$$

Trazando las rectas (fig. 37) OC y O_1C_1 y prolongándola hasta que se encuentren en A con la normal en I a CC_1 que será la IA, en el triángulo IO_1C haciendo $\widehat{AC}I = \theta_1$.

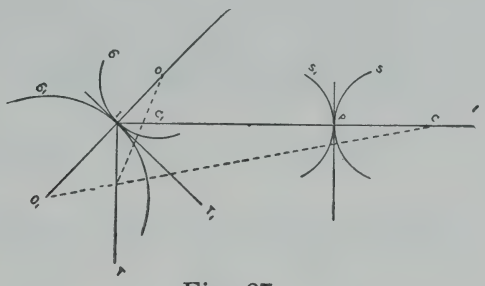


Fig. 37

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{\operatorname{sen}(\theta_1 - \varphi)}{\operatorname{sen}\theta_1} = \cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{cotg}\theta_1 \tag{60}$$

o bien

$$\frac{r_1}{\rho_1} - \cos\varphi = -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{cotg}\theta_1 \tag{61}$$

en el triángulo IOC_1 haciendo $\widehat{AC}_1I = \theta$

$$\frac{r}{\rho} - \cos\varphi = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{cotg}\theta \tag{62}$$

por la ecuación (59) se deduce que

$$r \operatorname{cotg}\theta_1 = r_1 \operatorname{cotg}\theta \tag{63}$$

$$r_1 \operatorname{tag}\theta_1 = r \operatorname{tag}\theta \tag{64}$$

de lo que resulta $IA = IA$

De lo que se deduce la fórmula de Savary, expresa que el punto de intersección de O_1C_1 y OC con la IA coinciden, de la cual resulta la construcción siguiente: Dados los puntos I, O, O_1 siendo O y O_1 el centro de curvatura de dos perfiles cunjugados s y s_1 y C, C_1 los centros de curvatura de dos trayectorias polares σ y σ_1, I el centro instantáneo de rotación; las rectas OO_1 y CC_1 se encontrarán en un punto A de la paralela IT a la tangente común a dichos dos perfiles trazada por el centro instantáneo de rotación I.

§ 9 Rodadura y resbalamiento de curvas y de superficies.

Cuando se considera una curva s_1 fija en el espacio y otra curva s móvil pero que se conserve siempre tangente a la curva s_1 el punto de contacto I tomará diferentes posiciones sobre las líneas s_1 y s, los arcos recorridos por I podrán ser desiguales o iguales debido al movimiento que tenga s. Si consideramos arcos elementales, es decir si despues del tiempo elemental dt las posiciones de I sobre s y s_1 son I_1 e I_2 los arcos serán

$$II_1 = ds \qquad II_2 = ds_1$$

1°. Cuando $ds \neq ds_1$ se dice que hay *resbalamiento* o *deslizamiento*, la diferencia $ds_1 - ds$ se denomina resbalamiento elemental y la relación $\dfrac{ds_1 - ds}{dt}$ es la velocidad horaria de resbalamiento.

2°. Cuando $ds_1 = ds$ se dice que solamente hay *rodadura* entonces es que a la curva s se le denomina *ruleta* y a la curva s_1 *base.*

Al rodar la ruleta sobre la base tendrán en cada instante una tangente común en los puntos de contacto que corresponden a esos instantes y los respectivos ángulos de contingencia que corresponden a la ruleta y a la base son $d\alpha$ y $d\alpha_1$. El ángulo $d\theta = d\alpha + d\alpha_1$ se denominará ángulo de giro, representado por ρ y ρ_1 los radios de curvatura de la ruleta y de la base. se deduce que

$$(65) \qquad d\theta = \left\{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho}\right\} ds$$

o bien como la velocidad angular $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ y la velocidad lineal $V = \frac{ds}{dt}$ se tendrá

$$(66) \qquad \omega = \left\{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho}\right\} V$$

que es la velocidad *angular de la rodadura.*

Sea la superficie σ que en su movimiento siempre se encuentra en contacto con la superficie fija σ_1 entonces el punto de contacto I determinará dos lugares geométricos, en general dos curvas, una s sobre la superficie móvil y otra s_1 sobre la superficie fija. Si estas curvas estan en contacto en el punto I, se podrán presentar los casos siguientes: 1°. Cuando la curva s resbala sobre la curva s_1 se dice que la superficie σ resbala sobre la σ_1; 2°. Cuando la curva s rueda sobre la s_1 se dice que la superficie σ rueda y gira sin resbalar sobre la superficie σ_1; todo queda reducido a lo estudiado ya en el caso del movimiento de una curva sobre otra, cuando se trata de resbalamiento. Pero en el caso de rodadura la velocidad angular vectorial de la rodadura $\vec{\omega} = \vec{b}\,\omega$ siendo ω la velocidad angular de la rotación alrededor de un eje instantáneo que pasa por I. Las componentes del vector $\vec{\omega}$ serán una normal a las dos superficies ω_1 y otra situada en el plano tangente común a las superficies ω_2, la primera ω_1 es la velocidad angular del giro de la superficie σ sobre su punto de apoyo o *pivotamiento* y la segunda ω_2 es la velocidad angular de la *rodadura.*

Si las superficies σ y σ_1 tuviesen más de un punto de contacto, en unos podrá haber resbalamiento y en otros solo pivotamiento o rodadura.

§ 10 Movimiento epicicloidal esférico.

Sean dos circunferencias, ruleta y base situadas en una esfera, un punto cualquiera de la superficie esférica rígidamente ligado a la ruleta describe una trayectoria sobre la superficie esférica que se denomina trocoide esférica, si el punto perteneciente a la circunferencia (ruleta) la trayectoria será una epicicloide esférica.

El estudio se reduce a imaginar un punto ligado a un cono de revolución que rueda sin deslizarse sobre otro cono del mismo vértice.

Tomando como eje del cono fijo el y_3 y denominando φ el semiángulo en el vértice del cono, siendo β el semiángulo en el vértice del cono móvil cuyo eje x_3 forma con el y_3 el ángulo $\varphi + \beta$ en un plano que forma con el plano y_3Oy_1 un ángulo invariable θ. El eje instantáneo de rotación será la generatriz común OI situada en el plano y_3Ox_3. Los cosenos directores de OI son

$$(67) \qquad \cos\alpha_1 = \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \qquad \cos\alpha_2 = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \qquad \cos\alpha_3 = \cos\varphi$$

La velocidad angular $\vec{\omega}$ de la rotación instantánea tendrá como componentes según los ejes $Oy_1y_2y_3$

$$(68) \qquad \omega_1 = \omega\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \qquad \omega_2 = \omega\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$$

$$\omega_3 = \omega\cos\varphi$$

de las cuales se deducirán en cada caso las expresiones de la velocidad de un punto rígidamente ligada al cono móvil.

En cuanto al valor de ω puede obtenerse en función de $\dfrac{d\theta}{dt}$ considerando que $\vec{\omega}$ es el vector resultante de los vectores $\vec{j}_3\dfrac{d\theta}{dt}$ y de $\vec{\omega}^*$ que es el vector velocidad angular con que el cono móvil gira alrededor de su propio eje. En el paralelógramo correspondiente se tendrá

$$\vec{\omega} = \frac{\operatorname{sen}(\varphi + \beta)}{\operatorname{sen}\beta}\,\bar{j}_3 \cdot \frac{d\theta}{dt} \tag{69}$$

multiplicando escalarmente por el versor $\bar{j}_3$ se tiene

$$\omega = \frac{\operatorname{sen}(\varphi + \beta)}{\operatorname{sen}\beta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \tag{70}$$

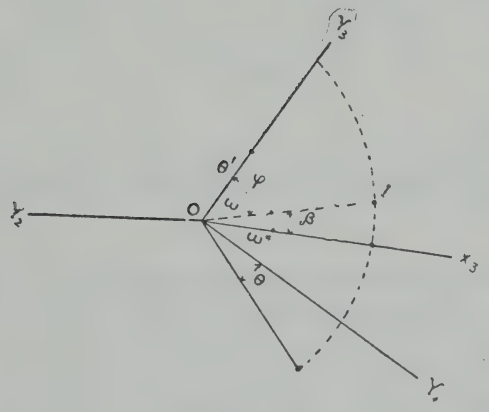


Fig. 38

§ 11 Trocoides

Cuando solamente hay rodadura entre dos curvas coplanares, un punto cualquiera ligado invariablemente a la ruleta al moverse ésta sobre la base describe una línea en general curva, que se denomina *curva de rodadura o trocoide* en general.

En el caso especial de que ambas curvas sean circunferencias segun que la ruleta sea tangente exterior o interior a la base las trocoides reciben el nombre de *epitrocoides o hipotrocoides.*

Las epitrocoides cuando el punto está en la ruleta se denomina *epicicloide normal.* Si el punto está en el extremo de la ruleta se denomina *epicicloide alargada* y si está en el interior de la ruleta se denomina *epicicloide acortada.*

Las hipotrocoides cuando el punto está en la ruleta se denomina *hipocicloide normal*, si está en el exterior de la ruleta se denomina *hipocicloide alargada* y si está en el interior de la ruleta se denominará *hipocicloide acortada.*

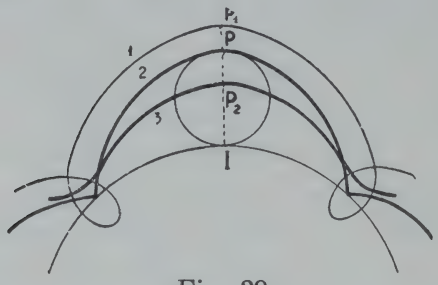


Fig. 39

§ 12 Ecuaciones de las epicicloides e hipocicloides.

Sean la base y la ruleta dos circunferencias de centro O y O_1 referidas a un sistema cartesiano de ejes Ox_1x_2 ortogonales cuyo origen es el centro de la base, la posición actual de la ruleta despues de haber recorrido el arco s corresponde al punto de contacto I, representemos por R y r los radios de la base y de la ruleta, sea θ el ángulo que corresponde al arco s de la base, en la recta que forma el ángulo α con la linea que une los centros O y O_1 y que dicho ángulo corresponde al arco s de la ruleta; tomemos un punto cualquiera P que diste nr del centro de la ruleta, las coordenadas cartesianas de P serán x_1, x_2 trazando la paralela por el punto O_1 al eje x_1 encontrará en Q a la ordenada del punto P, inmediatamente se deduce

$$x_1 = ON + NM \qquad x_2 = NO_1 + QP$$

o bien

$$x_1 = (R + r)\cos\theta + nr\cos(\theta + \alpha)$$

(71)

$$x_2 = (R + r)\,\text{sen}\,\theta + nr\,\text{sen}\,(\theta + \alpha)$$

Como

$$s = R\theta = r\alpha \qquad \alpha = \frac{R}{r}\,\theta$$

cuando $\alpha = 2\pi$ el ángulo $\theta = \theta^* = 2\pi\,\frac{r}{R}$ luego

$$x_1 = (R + r)\cos\theta + nr\cos\left\{1 + \frac{R}{r}\right\}\theta$$

(72)

$$x_2 = (R + r)\,\text{sen}\,\theta + nr\,\text{sen}\left\{1 + \frac{R}{r}\right\}\theta$$

que son las ecuaciones de las *epicicloide.*

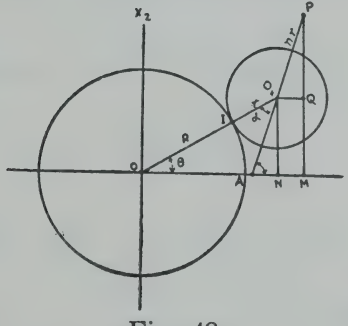


Fig. 40

Las ecuaciones de las *hipocicloides* se obtienen facilmente, bastará considerar para la distancia de los centros de las circunferencias base y ruleta $OO_1 = R - r$ o simplemente cambiar en las ecuaciones de las epicicloides r por $-r$, así tendremos

$$x_1 = (R - r)\cos\theta + nr\left\{1 - \frac{R}{r}\right\}\theta$$

(73)

$$x_1 = (R - r)\,\text{sen}\,\theta + nr\left\{1 - \frac{R}{r}\right\}\theta$$

que serán las ecuaciones de las *hipocicloides.*

§ 13 Movimiento relativo de dos figuras que giran alrededor de distintos puntos.

Estudiemos la mutua rodadura de dos curvas s y s_1 que giran en un mismo plano alrededor de dos puntos fijos O y O_1, o en otros términos si es posible con una rueda de perfil curvilíneo comunicar por contacto una rotación a otra rueda de perfil curvilíneo.

Refiriendo la curva s al polo O y al eje polar OA, la curva s_1 al polo O_1 y al eje polar OA_1, siendo A y A_1 puntos que en el tiempo $t = 0$ coincidieron en C (punto de contacto).

La ecuación de cada una de dichas curvas será

(74) $$r = r(\theta) \qquad r_1 = r_1(\theta_1)$$

siendo

(75) $$r + r_1 = a \qquad s = s_1$$

diferenciando las (75)

(76) $$dr = -dr_1 \qquad ds = ds_1$$

luego

(77) $$dr^2 + r^2 d\theta^2 = dr_1^2 + r_1^2 d\theta_1^2$$

de la cual se deduce que

$$r d\theta = \pm r_1 d\theta_1 \tag{78}$$

o bien

$$d\theta_1 = \pm \frac{r}{r_1} d\theta = \pm \frac{r}{a - r} d\theta = \pm \frac{r(\theta)}{a - r(\theta)} d\theta \tag{79}$$

integrándola da

$$\theta_1 = \int \frac{r(\theta)}{a - r(\theta)} d\theta \tag{80}$$

esta ecuación y la $r_1 = a - r(\theta)$ definen O_1 y r_1 en función de θ. La eliminación de θ nos dará la ecuación de s_1.

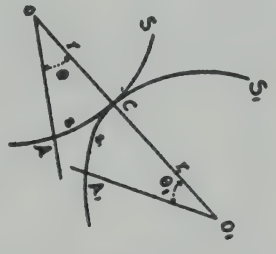


Fig. 41

NOTA 1

En general las propiedades de los productos escalar y vectorial de los versores fundamentales tratándose de ternas oblicuas quedaran definidas de la manera siguiente: Siendo θ_u por $u = 1,2,3$ los ángulos que forman los ejes entre sí y Ψ_u por $u = 1,2,3$ los ángulos que forman las proyectantes de cada uno de los versores fundamentales sobre el otro, con el eje de proyección, se tendrán las propiedades.

$$\text{(I)} \qquad \vec{\iota}_u \times \vec{\iota}_v = \begin{cases} 1 & \text{por } u = v \\ \dfrac{\operatorname{sen}(\Psi_w - \theta_w)}{\operatorname{sen} \Psi_w} & \text{,, } u \neq v \neq w \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \vec{\iota}_u \wedge \vec{\iota}_v = \begin{cases} 0 & \text{por } u = v \\ \vec{\iota}_w \operatorname{sen} \theta_w & \text{,, } u \neq v \neq w \end{cases}$$

NOTA 2

Centro de distancias medias.—Es un punto del espacio tal que la suma geométrica de las distancias a cada uno de los puntos de un sistema es igual a cero.

1°. Demostraremos que existe: en efecto sean P_u por $u = 1,2,3, \cdots n$ los puntos del sistema, tomemos un punto arbitrario en el espacio tal como A definiremos los vectores.

(1) $$P_u - A = \overrightarrow{V_u} = \overrightarrow{\tau_u} \cdot V_u$$

cuya suma geométrica será el vector

$$P - A = \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\tau} \cdot V$$

(2) $$(P - A) = \sum_{1}^{n} {}_u (P_u - A)$$

o bien

(3) $$\overrightarrow{\tau} \cdot V = \sum_{1}^{n} {}_u \overrightarrow{\tau_u} \cdot V_u$$

Dividiendo la longitud del vector $\overrightarrow{V}$ en tantas partes iguales al número de partes n, denominando O el primer punto de división se tendrá:

(4) $$(P_u - A) = (O - A) + (P_u - O)$$

$$u = 1,2,3 \cdots n$$

entonces sustituyendo en la (2)

(5) $$(P - A) = \sum_{1}^{n} {}_u (P_u - O) + n(O - A)$$

pero

$$P - A = \overrightarrow{\tau} \cdot V \quad . \quad n(O - A) = \overrightarrow{\tau} \cdot V$$

que reduce la anterior a la

(6) $$\sum_{1}^{n} u (P_u - O) = 0$$

luego O es el centro de distancias medias.

2°. Demostraremos que no existe sino uno, en efecto, supuesto determinado O eligamos otro punto O_1 y admitamos que sea también centro de distancias medias del sistema de n puntos, entonces también tendremos

(7) $$\sum_{1}^{n} u (P_u - O_1) = 0$$

restando las ecuaciones

(8) $$\sum_{1}^{n} u (O_1 - O) = 0$$

demuestra que es único el centro de distancias medias.

NOTA 3

Centro de vectores paralelos.—Consideremos un sistema formado por n vectores aplicados paralelos $\overline{V}_u$. sean A_u por $u = 1,2,3, \cdots n$ los puntos asociados o de aplicación de dichos vectores.

El vector resultante estará determinado por

(9) $$\overline{R} = \sum_{1}^{n} u \, \overline{V}_u$$

representando por $\bar{\imath}$ el versor que les corresponde se tendrá

(10) $$\vec{R} = \vec{\iota} \sum_{1u}^{n} V_u$$

cuando

$$\sum_{1u}^{n} V_u \neq 0$$

el sistema será equivalente a un vector único $\vec{R}$ aplicado en un punto C del eje central y respecto a este punto deberá ser nulo el momento resultante, el punto C estará caracterizado por la condición

(11) $$\vec{M} = \sum_{1u}^{n} (A_u - C) \wedge \vec{V}_u = 0$$

o bien

(12) $$\vec{M} = \sum_{1u}^{n} (A_u - C) \wedge \vec{\iota} V_u = 0$$

o simplemente

(13) $$\left[\sum_{1u}^{n} (A_u - C)\, V_u\right] \wedge \vec{\iota} = 0$$

evidentemente el punto C no es unívocamente determinado, puesto que puede ser un punto cualquiera del eje central.

Ahora en particular un punto que satisfaga a la anterior fórmula, se verifica por la simple condición de que

(14) $$\sum_{1u}^{n} (A_u - C) \wedge V_u = 0$$

Si se denota con O otro punto cualquiera del espacio la fórmula anterior podrá ser escrita así:

(15) $$\sum_{1u}^{n} [(C - O) - (A_u - O)]\, V_u = 0$$

de la que se deduce:

$$(16) \qquad (C - O) \sum_{1\,u}^{n} V_u = \sum_{1\,u}^{n} (A_u - O)\, V_u$$

y cuando

$$\sum_{1\,u}^{n} V_u \neq 0$$

se tendrá

$$(17) \qquad C - O = \frac{\sum_{1\,u}^{n} (A_u - O)\, V_u}{\sum_{1\,u}^{n} V_u}$$

que determina la coordenada vectorial del centro de vectores paralelos.

Si referimos el sistema de vectores a una terna cartesiana ortogonal $Ox_1x_2x_3$ cuyos versores fundamentales sean i_v por $v = 1,2,3$ es evidente que

$$C - O = \sum_{1\,u}^{3} i_u\, x_{cv} \qquad A_u - O = \sum_{1\,u}^{3} i_v\, x_{uv}$$

$$u = 1,2,3, \cdots n$$

Multiplicando escalarmente la (17) por los versores fundamentales respectivamente tendremos:

$$(18) \qquad x_{cv} = \frac{\sum_{1\,u}^{n} V_u\, x_{uv}}{\sum_{1\,u}^{n} V_u} \qquad v = 1.2.3$$

INDICE

Pág.

Preliminares 5

Magnitud.—Unidad.—Magnitud Aritmética.—Magnitud Algebraica.—Magnitud Geométrica.—Magnitud Mecánica.—Equipolencia,—Orientación de la Terna.

CAPITULO I

TEORIA VECTORIAL

§ 1.—Segmentos, Segmentos Orientados y Vectores 7

Segmentos.—Segmentos Orientados.—Segmentos orientados equipolentes; Propiedades: Reflexiva, Simétrica y Transitiva.—Vectores.—Notación.—Vectores Unitarios.—Vectores Iguales.—Vectores componentes de un vector.—Proyección algebraica de un vector según una dirección orientada dada.—Representación cartesiana de los vectores.

§ 2.—Suma de punto y vector.—Suma de Vectores.—Producto de un vector por un número.—Vectores Coplanares 15

Suma de punto y vector.—Vectores aplicados.—Suma de vectores.—La suma de vectores goza de las propiedades asociativa y conmutativa.

Pág.

Producto de un vector por un número.—Vectores Coplanares.—Paralelógramo de vectores.—Paralelepípedo de vectores.—Componentes de un vector.—Vectores no coplanares.—Consecuencias.—Diferencia de un punto y vector.—Diferencia de dos vectores.—Descomposición de un vector.

§ 3.—Versores.—Producto escalar.—Producto vectorial.—Producto mixto.—Producto vectorial doble 26

Versor.—Estructura de los versores.—Universo bidimensional.—Universo tridimensional.—Universo cuatridimensional.—Producto escalar.—Expresión cartesiana del producto escalar.—Cuadrado de un vector.—Casos particulares.—Propiedades de que goza el producto escalar.—Propiedades del producto escalar de los versores fundamentales de una terna cartesiana ortogonal.—Producto vectorial.—Casos particulares.—Expresión cartesiana del producto vectorial.—Propiedades de que goza el producto vectorial.—Propiedades del producto vectorial de los versores fundamentales de una terna ortoganal.—Forma explícita de los productos escalar y vectorial de los versores fundamentales de una terna ortogonal.—Producto mixto.—Expresión cartesiana del producto mixto.—Propiedades del produato mixto.—Producto mixto ortogonal.—Producto vectorial doble.—Relaciones entre los productos escalar y vectorial.

§ 4.—Versores cuadrante 61

División de vectores.—Relación entre los versores lineales con los versores cuadrante y propiedades de estos últimos.

§ 5.—Vectores aplicados.—Orientación relativa de dos vectores.—Momento con respecto a un punto.—Momento con respecto a un eje 66

Asociación de un vector con un punto.—Concepto de vector aplicado.—Orientación relativa de dos rectas orientadas que se cruzan en el espacio.—Momento con respecto a un punto de un vector aplicado.—Expresión cartesiana del momento de un vector aplicado con respec-

Pág.

to a un punto.—Momento de un vector aplicado con respecto a un eje.—Expresión cartesiana del momento de un vector aplicado con respecto a un eje.—Resultante general y momento resultante de un sistema de vectores aplicados.—Modo de variar el momento al variar el centro de reducción.—Expresión cartesiana de la variación del momento al variar el centro de reducción.—Trinomio invariante.—Eje central.

§ 6.—Sistemas equivalentes de vectores aplicados.—Reducción de un sistema por otro de vectores aplicados.—Vectores paralelos 86

Sistemas equivalentes de vectores aplicados.—Expresión cartesiana de la equivalencia de los sistemas de vectores aplicados.—Operaciones elementales.—Sustitución o reductivilidad de un sistema por otro equivalente de vectores aplicados.—Reducir un sistema de vectores aplicados a tres vectores.—Reducción de sistemas de vectores aplicados a dos vectores.—Par de vectores aplicados.—Momento de un par de vectores aplicados.—Reducción de un sistema de vectores aplicados a un vector y un par.—Reducción de un sistema de vectores aplicados a dos vectores.—Reducción de un sistema de vectores aplicados a un solo vector.—Vectores aplicados paralelos y del mismo sentido.—Vectores aplicados paralelos y de sentido opuesto.—Determinación analítica del eje central.—Centro de vectores aplicados paralelos.—Momento con respecto a un plano de sistema de vectores aplicados.

CAPITULO SEGUNDO

Funciones de números.

§ 1.—Derivación de un vector variable.—Derivación de un punto variable 109

Pág.

Vector variable.—Derivada de un producto escalar.—Derivada de un producto vectorial.—Derivada de un producto mixto.—Fórmula de Taylor.—Punto variable.

§ 2.—Integración vectorial 118

§ 3.—Teoría de las curvas gausas.—Generalidades.—Terna Principal.—Plano osculador.—Curvatura 119

Ecuación paramétrica de una curva.—Plano osculador.—Curvatura.

§ 4.—Fórmula de Frenet.—Ecuaciones intrínsecas 124

Fórmula de Frenet.—En coordenadas cartesianas.

§ 5.—Campos escalares y vectoriales 127

Campos escalares.—Campos vectoriales.

CAPITULO TERCERO

§ 1.—Funciones de puntos 130

Gradiente.—Gradiente de la distancia.—Propiedades del gradiente.—Divergencia.—Divergencia de la distancia.—Rotacional.—Propiedades de la divergencia y el rotacional.—Vector simbólico.—Relación entre las tres funciones: divergencia, gradiente y rotacional.—Circulación de un vector aplicado.—Flujo de un vector aplicado.—Expresión cartesiana de la circulación de un vector.—Expresión cartesiana del flujo de un vector.—Las tres fórmulas fundamentales.—Teorema de Green.

CAPITULO CUARTO

CINEMATICA

§ 1.—Preliminares.—Tiempo.—Punto móvil.—Velocidad.—Aceleración 163

Pág.

Sistema invariable o rígido.—División del estudio atendiendo a los sistemas invariables.—Trayectoria.—División del estudio atendiendo a la trayectoria.—Ley del movimiento.—División del estudio atendiendo a la ley del movimiento.—Punto o sistema de referencia.—División del estudio atendiendo al punto o sistema de referencia.—División de los movimientos de los sistemas invariables.—Movimientos finitos de los sistemas.—Movimientos elementales de los sistemas.—Movímientos simultáneos de los sistemas.—Movimientos de contacto de los sistemas.—Distinción entre la Geometría y la Cinemática.—Tiempo.—Tiempos iguales.—Medida del tiempo.—Unidad de tiempo.—Representación geométrica del tiempo.—Punto móvil.—Ley del movimiento.—Línea de los espacios.—Velocidad.—Velocidad escalar.—Velocidad vectorial.—Clasificación de las velocidades.—Velocidad angular.—Relación entre las velocidades lineal y angular.—Velocidad areolar.—Carácter intrínsico de la velocidad.—Línea de las velocidades.—Medida de la velocidad.—Hodógrafa.—Aceleración.—Componentes tangencial y centrípeta del vector aceleración.—Componentes cartesianas del vector aceleración total.—Clasificación de los movimientos por la fórmula de la aceleración total.—Línea de las aceleraciones.—Movimiento uniforme.—Ley del movimiento.—Representación gráfica del movimiento uniforme.- Movimiento uniformemente variado.—Ley del movimiento.—Discusión.—Representación gráfica del movimiento uniformemente variado.—La velocidad y la aceleración en coordenadas polares.—Aceleración.—Movimiento plano.

§ 2.—Movimientos periódicos 195

Movimiento periódico.—Ley del movimiento periódico.—Vectores giratorios.—Movimiento oscilatorio o armónico.—Oscilación simple.—Oscilación doble o completa.—Elongación.—Fase.—Ley del movimiento oscilatorio o armónico.—Movimiento vibratorio que tiende a extinguirse.—Movimiento helicoidal uniforme.

CAPITULO QUINTO

Pág.

§ 1.—Sistema invariable o rígido 213

Representación cartesiana de los puntos y de los vectores en un sistema rígido.—Movimiento de traslación.—Movimiento de rotación.—Teorema de los ángulos de rotación.—Vector velocidad angular.—Aceleración de un punto del sistema rotante.—Componentes cartesianas del vector velocidad y del vector aceleración en el movimiento de rotación.

§ 2.—Movimiento compuesto 226

Definición.—Movimiento rototraslatorio.—Movimiento rototraslatorio uniforme.

§ 3.—Movimiento rígido general 235

Fórmulas de Poisson.—Componentes cartesianas del vector $\vec{\omega}$.—Velocidad de un movimiento rígido general.—Componentes cartesianas del vector $\vec{\omega}$.—Componentes cartesianas de la velocidad angular en un sistema rígido.—Componentes cartesianas del vector $\vec{V}$.—Distribución instantánea de la velocidad y movimiento helicoidal tangente.—Modo de variar los vectores característicos.—Movimiento rígido con un punto fijo o paralelo a un plano fijo.

CAPITULO SEXTO

TEORIA DEL MOVIMIENTO RELATIVO

§ 1.—Generalidades.—Principio fundamental del movimiento relativo.—Teorema de Coriolis 253

Expresión cartesiana de la aceleración de Coriolis.—Movimiento particular de arrastre.

Pág.

§ 2.—Movimiento de un sistema rígido respecto a dos referencias móviles a la vez 260

§ 3.—Derivada vectorial respecto a ejes en movimiento 261

CAPITULO SETIMO

§ 1.—Movimiento rígido alrededor de un punto fijo 265

Precesión regular.—Ecuaciones de la precesión regular. —Precesión regular de la Tierra.

CAPITULO OCTAVO

§ 1.—Reglada Rodante 275

Movimiento de una figura plana en su plano.

§ 4.—Trayectorias polares. Base y Ruleta. Teoremas de Cauchy y de Chasles 284

§ 5.—Perfiles conjugados 287

§ 6.—Movimiento de un segmento de recta rígido cuyos extremos tienen por trayectorias dos rectas ortogonales .. 288

Antiparalelógramo articulado.

§ 7.—Fórmula de Savary 291

§ 8.—Interpretación geométrica se Savary 294

Rodadura y resbalamiento de curvas y de superficies .. 296

§ 9.—Movimiento epicicloidal esférico 298

§ 11.—Trocoides 299

Pág.

§ 12.—Ecuaciones de las epicicloides e hipocicloides 300

§ 13.—Movimiento relativo de dos figuras que giran alrededor de distintos puntos 302

Nota 1.—Prepiedades en general de los productos escalar y vectorial 304

Nota 2.—Centro de distancias medias 304

Nota 3.—Centro de vectores paralelos 306

F I N

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 072893263

PtCm